Université d'Orléans
Département de Mathématiques

4 Mars 2016

L2MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen Partiel

Documents et calculatrices interdits

Question de cours :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et H un sous-espace vectoriel de E. Enoncer trois conditions équivalentes à "H est un hyperplan de E"

Exercice 1

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 muni de la base canonique $(1, X, X^2)$. On considère les formes linéaires sur E telles que

$$\varphi_1(P) = P(1); \quad \varphi_2(P) = P(2); \quad \varphi_3(P) = P(3).$$

1. Donner les coordonnées de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dans la base duale de la base canonique de E.

2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de l'espace vectoriel dual E^*.

3. Calculer la base préduale $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}'$.

4. Donner les polynômes d'interpolation de Lagrange (L_1, L_2, L_3) associés aux points $1, 2, 3$.

5. Comparer les résultats des questions 3 et 4.

T.S.V.P.

Exercice 2

Soient $E = \mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ sa base canonique.

On considère la forme quadratique sur E définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4xy + 2yz + 2xz.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.

2. La forme quadratique q est-elle dégénérée ? Quel est son noyau ?

3. Soit $D = Vect(\epsilon_3)$. Déterminer $D^\perp$, $D \cap D^\perp$ et $\dim(D) + \dim(D^\perp)$. A-t-on $E = D \oplus D^\perp$?

4. En utilisant la méthode de Gauss, déterminer la signature de q et son rang.

5. Déterminer une base q-orthogonale et la matrice de q dans cette base.

6. Déterminer le cône isotrope de q. (*Facultatif* : essayez de le dessiner).

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note $E = M_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Etant donné $A \in M_n(\mathbf{R})$, on note $\mathrm{Trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ sa trace et on pose $q(A) = \mathrm{Trace}(A^2)$.

1. Montrer que Trace est une forme linéaire sur E.

2. Montrer que pour tous $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{Trace}(AB) = \mathrm{Trace}(BA)$.

3. Montrer que $q : E \to \mathbf{R}$ est une forme quadratique. Quelle est sa forme polaire ?

4. Calculer $\mathrm{Trace}({}^tAA)$ pour $A \in M_n(\mathbf{R})$.

5. Montrer que la forme quadratique q est non dégénérée.

6. Soit $F = \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (c'est-à-dire telles que ${}^tA = A$). Montrer que la restriction $q_{|F} : F \to \mathbf{R}$ de q à F est définie positive.

7. Soit $G = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques (c'est-à-dire telles que ${}^tA = -A$). Montrer que la restriction $q_{|G} : G \to \mathbf{R}$ de q à G est définie négative.

8. En déduire la signature de q.