Université d'Orléans 13 Mars 2015
Département de Mathématiques
L2MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen Partiel

Documents et calculatrices interdits

Question de cours :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K et $q : E \to K$ une forme quadratique.

1) Qu'appelle-t-on forme polaire de q ? On notera f la forme polaire de q.

2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Quand dit-on que $\mathcal{B}$ est une base q-orthogonale ?

3) Que savez-vous de l'existence de bases q-orthogonales ?

Exercice 1

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. Pour i et j deux entiers compris entre 1 et 2, on considère la matrice $E_{i,j}$, élément de $\mathcal{E}$, dont le coefficient sur la ligne i et la colonne j est 1, tous ses autres coefficients étant nuls.

1. a) Montrer que $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2}$ est une base de $\mathcal{E}$ et retrouver que la dimension de $\mathcal{E}$ est 4.

   b) Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$ pour toutes les valeurs possibles des couples (i, j) et (k, l).

2. On considère l'application F définie pour tout $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ par $F(A, B) = \mathrm{tr}(({}^tA)B)$, où tr désigne la trace et ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

   a) Montrer que F est une forme bilinéaire symétrique.

   b) Calculer la matrice de F dans la base $\mathcal{B}$.

3. a) Expliciter la forme quadratique associée à F.

   b) Déterminer le rang, le noyau de cette forme quadratique.

   c) La forme est-elle dégénérée ? définie ?

Exercice 2

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit q l'application de E dans $\mathbf{R}$ définie par $q(P) = P(0)P(1)$.

1. a) Montrer que q est une forme quadratique.

   b) Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E.

   c) La forme quadratique est-elle positive, négative ?

2. Soit $P := X^2 + X + 1$ et $V = \mathrm{Vect}(P)$. Déterminer $V^{\perp}$ et $V^{\perp\perp}$.

   a) Déterminer le rang de q puis son noyau.

   b) Déterminer le cône isotrope $C(q)$ de q. Constuire une base de E formée de vecteurs isotropes. Le cône isotrope est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 3

Soient $E = \mathbf{R}^3$, $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la base canonique et $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*)$ sa base duale.

On considère la forme quadratique sur E définie par

$$q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 4yz - 2xz.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.
2. La forme quadratique q est-elle dégénérée ? Quel est son noyau ?
3. En utilisant la méthode de Gauss, déterminer la signature de q et son rang.
4. Déterminer une base q-orthogonale et la matrice de q dans cette base.
5. Déterminer le cône isotrope de q. Dessiner-le.