Université d'Orléans 14 Mars 2014
Département de Mathématiques
L2MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen Partiel
Documents et calculatrices interdits

Question de cours :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K et $q : E \to K$ une forme quadratique.

1) Qu'appelle-t-on forme polaire de q ? On notera f la forme polaire de q.

2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Quand dit-on que $\mathcal{B}$ est une base q-orthogonale ?

3) Que savez-vous de l'existence de bases q-orthogonales ?

Exercice 1

Soient $E = \mathbf{R}^3$, $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la base canonique et $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*)$ sa base duale.

On considère la forme quadratique sur E définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4yz + 2zx.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.
2. La forme quadratique q est-elle dégénérée ? Quel est son noyau ?
3. En utilisant la méthode de Gauss, déterminer la signature de q et son rang.
4. Déterminer une base q-orthogonale et la matrice de q dans cette base.
5. Déterminer le cône isotrope de q.

Exercice 2

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ et ψ des formes linéaires sur E. On considère l'application $u : E \to K^p$ telle que pour tout $x \in E$, $u(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x))$.

1) Montrer que si $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$, alors $\bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(\psi)$.

2) Le but de cette question est de montrer la réciproque.

a) Exprimer la dimension du sous-espace vectoriel

$$\mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_p) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$$

en fonction de la dimension de $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi)$.

b) En déduire que si $\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(\psi)$, alors

$$\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi) = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$$

et $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

3) Soit $u : E \to F$ une application linéaire, où E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p. Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F et $(f_1^*, \ldots, f_p^*)$ sa base duale. On pose $\varphi_i = f_i^* \circ u$ pour $i = 1, \ldots, p$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$

b) On suppose que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. Soit $\psi \in E^*$. Montrer que $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$. En déduire que l'application transposée ${}^t u : F^* \to E^*$ est surjective.

c) Soit $x \in E$ tel que $\psi(x) = 0$ pour tout $\psi \in E^*$. Montrer que $x = 0$.

d) On suppose que ${}^t u : F^* \to E^*$ est surjective. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$.