Université d'Orléans
Département de Mathématiques
15 Mars 2013

L4MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen Partiel

Documents et calculatrices interdits

Question de cours :

Enoncer le théorème de Sylvester.

Exercice 1

Soient $E = \mathbf{R}^3$, $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la base canonique et $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*)$ sa base duale.

On considère la forme quadratique sur E définie par

$$q(x, y, z) = 2xy + 4yz + 2zx.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.
2. La forme quadratique q est-elle dégénérée ? Quel est son noyau ?
3. Soit $D = Vect(\epsilon_1)$. Déterminer $D^\perp$, $D \cap D^\perp$ et $dim(D) + dim(D^\perp)$. A-t-on $E = D \oplus D^\perp$?
4. En utilisant la méthode de Gauss, déterminer la signature de q et son rang.
5. Déterminer une base q-orthogonale et la matrice de q dans cette base.

Exercice 2

On dit que $\alpha \in \mathbf{R}$ est racine de multiplicité $\geq m$ du polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ s'il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$. On rappelle que cela est équivalent à $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ où $P^{(k)}$ est le polynôme dérivé k-ème.

On note $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré $\leq n$ et E^* l'espace vectoriel dual. On note $\mathcal{B}_0$ la base $(\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = X, \ldots, \epsilon_n = X^n)$ de E et $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_0^*, \epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_n^*)$ sa base duale.

1. On fixe $\alpha \in \mathbf{R}$. Pour $P \in E$ et $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on définit $\varphi_k(P) = P^{(k)}(\alpha)$.
   a) Montrer que φ_k est un élément de E^*.
   b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi_0) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_1) \ldots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0\}$.

c) Déduire de la question précédente que $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^*.

2. On suppose que $\alpha = 0$. On note alors ψ_k la forme linéaire $\psi_k(P) = P^{(k)}(0)$.

a) Exprimer $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ dans la base $\mathcal{B}_0^*$ de E^*. Donner la matrice Q du changement de bases de $\mathcal{B}_0^*$ à $(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$.

b) Donner la base préduale $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de la base $(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$.

c) Déduire la formule de Mac-Laurin pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$:

$$P = P(0) + P'(0)\frac{X}{1!} + \ldots + P^{(n)}(0)\frac{X^n}{n!}.$$

3. On suppose que $\alpha \in \mathbf{R}$ est quelconque. On définit $\tau : E \to E$ par $\tau(P)(X) = P(X - \alpha)$

a) Montrer que τ est un isomorphisme linéaire.

b) On note ${}^t\tau : E^* \to E^*$ l'application transposée. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, ${}^t\tau(\varphi_k) = \psi_k$, où φ_k est défini comme dans la question 1 et ψ_k comme dans la question 2.

c) En déduire la base préduale de la base $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, puis la formule de Taylor pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$:

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)\frac{X - \alpha}{1!} + \ldots + P^{(n)}(\alpha)\frac{(X - \alpha)^n}{n!}.$$