Université d'Orléans 9 Mars 2012
Département de Mathématiques
L4MA02 Algèbre III

Examen Partiel

Documents et calculatrices interdits

Question de cours :

Enoncer le théorème de Sylvester.

Exercice 1

Soient $E = \mathbf{R}^4$, $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ la base canonique et $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*, \epsilon_4^*)$ sa base duale.

On considère la forme quadratique sur E définie par

$$q(x, y, z, t) = xy + 2xz + xt - 2yt - 4zt.$$

On considère également les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sur E définies par
$\varphi_1(x, y, z, t) = x + y + 2z - t$
$\varphi_2(x, y, z, t) = x - y - 2z - 3t$
$\varphi_3(x, y, z, t) = t$
$\varphi_4(x, y, z, t) = x + y + z + t.$

1. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.
2. Soit D la droite engendrée par le vecteur $v = 2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$.
   a) Déterminer $D^\perp$. Quelle est sa dimension ?
   b) Donner une base de $D^\perp$.
   c) Déterminer $D^{\perp\perp}$. Quelle est sa dimension ?
   d) Que peut-on en déduire sur la dégénérescence de q ?
3. a) Déterminer les coordonnées de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ dans la base $\mathcal{B}_0^*$.
   b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^*
   c) Déterminer la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E dont $\mathcal{B}'$ est la base duale.
4. a) Déterminer la signature de q.
   b) En déduire le rang et le noyau de q.
   c) Déterminer une base q-orthogonale et la matrice de q dans cette base.

Exercice 2

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à 2. Soit $q : E \to \mathbf{R}$ l'application définie par $q(P) = b^2 - 4ac$ pour tout polynôme $P = aX^2 + bX + c$ appartenant à E.

1. Montrer que q est une forme quadratique en donnant son expression matricielle dans la base $(X^2, X, 1)$ de E.

2. Donner une description simple du cône isotrope $C(q)$ de q.

3. Déterminer la signature et le rang de q.

4. Trouver une base de E orthogonale pour q.

5. Soit $r \in \mathbf{R}$ et soit H le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes $P \in E$ tels que $P(r) = 0$.

   a) Quelle est la dimension de H ?

   b) Quelle est la dimension de $H^\perp$?

   c) Montrer que $(X - r, (X - r)^2)$ est une base de H.

   d) Déterminer $H^\perp$.