Département de Mathématiques
Université d'Orléans

L4 MT 02 : Algèbre III
2007-2008

Partiel du 12 Mars 2008

10h15-12h

Documents et calculatrices interdits

Questions de cours :

1. Soit E un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q admettant f pour forme polaire.
   (a) Soit A une partie de E. Donner la définition de $A^{\perp}$.
   (b) Si $A \subset B$, comparer $A^{\perp}$ et $B^{\perp}$. Donner une démonstration.
   (c) Comparer $A^{\perp}$ et $(\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$. Donner une démonstration.
2. Soient f une forme bilinéaire symétrique sur un K-espace vectoriel E et q la forme quadratique associée. Enoncer les deux formules de polarisation et en démontrer une.

Exercice I :

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ une famille libre de formes linéaires sur E, et ψ une forme linéaire sur E.

1. Montrer que, si ψ appartient à $\mathrm{Vect}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\})$ alors $\bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.
2. Déterminer la dimension de $F = \bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.
3. Etablir la réciproque de la question 1.
   (On pourra s'intéresser à la dimension de $F \bigcap \mathrm{Ker}(\psi)$).

Exercice II :

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ et $\mathcal{B}_0^* = (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \varepsilon_4^*)$ la base duale. On considère la forme quadratique q sur E définie par :

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad q((x,y,z,t)) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz + 4yt\,.$$

On notera f la forme polaire de q.
On considère également sur E les formes linéaires φ_i, pour $i = 1 \dots 4$ définies par : $\forall u = (x,y,z,t) \in E$, $\varphi_1(u) = x - y - z\,,\ \varphi_2(u) = y + t\,,\ \varphi_3(u) = y - t$ et $\varphi_4(u) = z$.

1. Déterminer la matrice A de q relativement à la base $\mathcal{B}_0$.
2. Soit D la droite engendrée par le vecteur $v = (1,1,0,0)$.
   (a) Déterminer $D^{\perp}$. Quelle est sa dimension ?
   (b) Donner une base de $D^{\perp}$.
   (c) Déterminer $D^{\perp\perp}$. Quelle est sa dimension ?
   (d) Que peut-on en déduire sur la dégénérescence de q ?
3. (a) Déterminer les coordonnées de chaque φ_i dans $\mathcal{B}_0^*$ base duale de $\mathcal{B}_0$.
   (b) Montrer que la famille $(\varphi_i)_{i=1\dots4}$ est une base de E^*.
   (c) Déterminer la base de E dont $(\varphi_i)_{i=1\dots4}$ est la base duale.
4. (a) Déterminer la signature de q.
   (b) En déduire le rang et le noyau de q.
   (c) Déterminer une base q-orthogonale et la matrice de q dans cette base.