Université d'Orléans
Département de Mathématiques
9 Mai 2017
L4MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen
Première Session
durée : 2 heures
Documents et appareils électroniques interdits

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Questions de cours :

1. Enoncer le théorème de Sylvester sur les formes quadratiques réelles.

2. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1

Soit $E = \mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel et de $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_\mathbf{1}, \epsilon_\mathbf{2}, \epsilon_\mathbf{3}, \epsilon_\mathbf{4})$ sa base canonique. On considère les vecteurs

$$\mathbf{u_1} = \epsilon_\mathbf{1}, \quad \mathbf{u_2} = \epsilon_\mathbf{1} + \epsilon_\mathbf{3}, \quad \mathbf{u_3} = \epsilon_\mathbf{1} + \epsilon_\mathbf{2} + \epsilon_\mathbf{3} - \epsilon_\mathbf{4}$$

et $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

1. (a) Montrer que la famille $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ est libre.
   (b) Déterminer une base orthogonale de F.
   (c) Déterminer la projection orthogonale de $\mathbf{u} = \epsilon_\mathbf{1} + \epsilon_\mathbf{2}$ sur F.
2. On considère la forme quadratique q définie sur E par :

$$q(x, y, z, t) = x^2 + z^2 + t^2 + 2xz + 2xt + 4yz + 6zt.$$

   (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.
   (b) Déterminer le q-orthogonal de F. Quelle est sa dimension ?
   (c) Que peut-on en déduire sur la dégénérescence de la forme quadratique q ?
3. (a) Déterminer la signature, le rang et le noyau de q.
   (b) Déterminer une base de E qui soit q-orthogonale.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $q_0, q : E \to \mathbf{R}$ deux formes quadratiques sur E. On suppose que q_0 est définie positive.

1. Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}_0$ de E qui soit q_0-orthonormale.

2. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q)$ la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P telle que $D = {}^tPAP$ soit une matrice diagonale.

3. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E qui soit à la fois q_0-orthonormale et q-orthogonale.

4. Soient $E = \mathbf{R}^2$ et q_0 et q données par $q_0(x,y) = x^2 + y^2$ et $q(x,y) = 2xy$. Déterminer une base $\mathcal{B}$ qui soit à la fois q_0-orthonormale et q-orthogonale. Donner l'expression de q_0 et de q dans cette base.

Exercice 3

On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure usuelle d'espace vectoriel euclidien orienté. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ défini par la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. L'endomorphisme f est-il symétrique ? Montrer que f est un endomorphisme orthogonal.

2. Donner une description géométrique complète de cet endomorphisme.

3. Donner une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f a une forme réduite. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 4

Soit $E = C([-\pi,\pi],\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$. On le munit du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

On considère les fonctions $e_1 : t \mapsto 1/\sqrt{2}$, $e_2 : t \mapsto \cos t$ et $e_3 : t \mapsto \sin t$.

1. Montrer que la famille (e_1,e_2,e_3) est orthonormale.

2. Justifier que (e_1,e_2,e_3) est une base du sous-espace vectoriel F engendré par e_1, e_2 et e_3.

3. Soit $f \in E$. Donner l'expression de la projection orthogonale $P_F(f)$ de f sur F dans la base (e_1,e_2,e_3). Donner l'expression de $\|P_F(f)\|^2$.

4. Déterminer a_0, a_1, b_1 tels que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t - \frac{a_0}{\sqrt{2}} - a_1\cos t - b_1 \sin t|^2 dt = \inf_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbf{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} |t - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \beta\cos t - \gamma\sin t|^2 dt$$

5. Calculer la distance $d(f,F)$ de la fonction $f : t \mapsto t$ au sous-espace vectoriel F.