Corrigé succinct

Examen du 9 mai 2017

Questions de cours

1. Sylvester : soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Alors

i) il existe des bases $\mathcal{B}$ de E telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

1 apparait s fois, -1 — t fois

ii) le couple (s,t) ne dépend pas de $\mathcal{B}$

On peut noter que $s+t$ est le rang de q

2. Cauchy-Schwarz. Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in E$. Alors

i) $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$

ii) on a l'égalité ssi x et y sont liés

Exercice 1

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

1 a) $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre : on peut extraire un déterminant d'ordre 3 non nul, par exemple $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} = -1$

b) On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt :

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{e}_1\rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle}\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\langle \vec{u}_3, \vec{e}_1\rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle}\vec{e}_1 - \frac{\langle \vec{u}_3, \vec{e}_2\rangle}{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle}\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthogonale de F

c) $$P_F(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle}\vec{e}_1 + \frac{\langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle}{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle}\vec{e}_2 + \frac{\langle \vec{u}, \vec{e}_3\rangle}{\langle \vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle}\vec{e}_3$$

$$= \vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}$$

2. a) $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} \in$ q-orthogonal de F $\iff {}^t\vec{x} A \vec{u}_i = 0 \quad \forall i = 1,2,3$

En écrivant ${}^t\vec{x} = (x \; y \; z \; t)$, cela donne les équations

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ x + y + z + 2t = 0 \\ x + 2y + z + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z + t = 0 \\ x + y + z + 2t = 0 \end{cases}$$

car la 3ème équation est combinaison linéaire des autres

On peut donc écrire

q-orthogonal de F $= \mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_2$ où $\varphi_1 = [1\;0\;1\;1]$ et $\varphi_2 = [1\;1\;1\;2]$

Sa dimension est $4 - \dim \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) = 4 - 2 = 2$

car (φ_1, φ_2) est libre.

c) Comme $\dim F + \dim F^{\perp q} = 3 + 2 = 5 \neq 4 = \dim E$,

on en déduit d'après un résultat du cours que q est dégénérée.

3. a) On utilise la méthode de Gauss. On choisit la variable x

$q(x,y,z,t) = x^2 + 2x(z+t)$ + termes ne contenant pas x

$= (x + (z+t))^2 - (z+t)^2 + \text{etc}$

$= (x + z + t)^2 + 4z(y+t)$ On utilise $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

$= (x+z+t)^2 + (z+y+t)^2 - (z-y-t)^2$

D'où signature$(q) = (2,1)$

$\mathrm{rang}(q) = 2+1 = 3$

Le noyau $N(q)$ de q est de dimension $4-3 = 1$. On résout $AX = 0$

On obtient $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $N(q) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) On peut écrire $q = \psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2$ avec

$\psi_1 = [1\;0\;1\;1]$, $\psi_2 = [0\;1\;1\;1]$, $\psi_3 = [0\;-1\;1\;-1]$. On complète par

$\psi_4 = [0\;0\;0\;1]$ pour obtenir une base de E^*. On calcule l'inverse de

${}^tQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. On trouve $P = ({}^tQ)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, d'où la base q-orthogonale $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 2

1. Comme signature$(q_0) = (n,0)$, il existe (voir Sylvester) une base $\mathcal{B}_0$ telle que $Mat_{\mathcal{B}_0}(q_0) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$. Cette base est q_0-orthonormale.
On aurait pu aussi invoquer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt

2. $A = Mat_{\mathcal{B}_0}(q)$ est une matrice symétrique. D'après le cours, il existe une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP = D$ soit diagonale.

3. Comme P est une matrice inversible, il existe une et une seule base $\mathcal{B}$ telle que P soit la matrice de passage $\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}$ (les vecteurs de $\mathcal{B}$ ont pour composantes dans la base $\mathcal{B}_0$ les colonnes de P).
On a $Mat_{\mathcal{B}}(q) = {}^tPAP = D$ et $Mat_{\mathcal{B}}(q_0) = {}^tP I_n P = I_n$.
Donc $\mathcal{B}$ est à la fois q-orthogonale et q_0-orthonormale

4. On prend $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$. Elle est q_0-orthonormale. On a $A = Mat_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
La diagonalisation de A donne

valeur propre 1, vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
-1, vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On normalise pour avoir une base q_0-orthonormée :
$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
La matrice de passage $\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}$ est $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on a ${}^tPAP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

On a $Mat_{\mathcal{B}}(q) = D$ et $Mat_{\mathcal{B}}(q_0) = I_2$.

Dans la base $\mathcal{B}$, $q_0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^2 + \underline{y}^2$
$q(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^2 - \underline{y}^2$

Exercice 3

1. La matrice A n'est pas symétrique.

La matrice A est orthogonale : ses colonnes sont deux à deux orthogonales, par exemple $\left\langle \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \right\rangle = -2+4-2=0$

Ses colonnes ont norme 1, per exemple

$$\left\| \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{9}\left(2^2+2^2+(-1)^2\right) = 1$$

2. A priori, f peut être une rotation ou une rotation-symétrie d'angle $\theta \neq k\pi$. Comme $\mathrm{Trace}(A) = 2 > 1$, seule la relation $2\cos\theta + 1 = 2$ peut être réalisée : f est une rotation d'angle θ avec $\cos\theta = \frac{1}{2}$ (c.a.d $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$)

L'axe de rotation est donné par $AX = X$. Cela donne

$$\begin{cases} -x-y+2z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \end{cases} \quad \text{qui peut être réduit à} \quad \begin{matrix} x+y-2z=0 \\ y-z=0 \end{matrix}$$

On choisit la solution $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ qui oriente l'axe de rotation.
Pour déterminer le sens de rotation, on choisit $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

et on calcule

$$\det(\vec{a}, A\vec{a}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Donc $\sin\theta > 0$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

En conclusion, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ d'axe orienté $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

3. On pose $\vec{e}_3 = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On complète en une base ON directe $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Par exemple, on peut prendre

$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

On a alors $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 4

1. On calcule les produits scalaires $<e_i, e_j>$. On rappelle que l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.

$$<e_1, e_2> = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \, dt = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sin t \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$<e_1, e_3> = 0$ car $t \mapsto \sin t$ est impaire

$<e_2, e_3> = 0$ car $t \mapsto \cos t \sin t$ est impaire

$$<e_1, e_1> = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = 1$$

$$<e_2, e_2> = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2t)\, dt = 1$$

$$<e_3, e_3> = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2t)\, dt = 1$$

2. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (résultat du cours)

3. $P_F(f) = <f, e_1> e_1 + <f, e_2> e_2 + <f, e_3> e_3$

$$\| P_F(f) \|^2 = <f, e_1>^2 + <f, e_2>^2 + <f, e_3>^2$$

4. $g_0 : t \mapsto \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \cos t + b_1 \sin t$ réalise le minimum de $\| f - g \|$ quand g parcourt F, c.a.d $\| f - g_0 \| = d(f, F)$. D'après le cours $g_0 = P_F(f)$. D'où

$$a_0 = <f, e_1> = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \frac{1}{\sqrt{2}} \, dt = 0$$

$$a_1 = <f, e_2> = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt = 0$$

(intégrales de fonctions impaires)

$$a_2 = <f, e_3> = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin t \, dt = \frac{1}{\pi}\left[-t\cos t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt \right] = 2$$

5. $d(f, F)^2 = \| f - P_F(f) \|^2 = \| f \|^2 - \| P_F(f) \|^2$

$$\| f \|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\| P_F(f) \|^2 = a_2^2 = 4$$

$$d(f, F)^2 = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \implies d(f, F) = \sqrt{\frac{2\pi^2}{3} - 4}$$