Université d'Orléans
Département de Mathématiques
10 Mai 2016

L4MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen
Première Session
durée : 2 heures
Documents et appareils électroniques interdits

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Questions de cours :

1. Enoncer le théorème de Sylvester sur les formes quadratiques réelles.
2. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1

On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbf{R}^4$ par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 4yz + 4yt + 6zt.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
2. En utilisant la méthode de Gauss, déterminer la signature de q et son rang.
3. La forme polaire de q est-elle un produit scalaire ?
4. Donner une base du noyau de q.

Exercice 2

On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$q(x, y) = x^2 + y^2 - (x - y)^2.$$

1. Donner la signature de q et son rang.
2. Décrire le noyau de q et son cône isotrope.
3. Donner une base q-orthogonale.

Exercice 3

On considère les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B sont des matrices orthogonales.

2. Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel représentés par ces matrices dans la base canonique.

Exercice 4

Soit $E = C([0,1], \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$. On le munit du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On considère le sous-espace vectoriel F engendré par les fonctions $f_1 : t \mapsto 1$ et $f_2 : t \mapsto t$.

1. Justifier que la dimension de F est 2.

2. Construire une base orthogonale (e_1, e_2) de F.

3. Expliciter la projection orthogonale $P_F(g)$ de g sur F d'un élément quelconque $g \in E$ dans la base (e_1, e_2).

4. Soient $g : t \mapsto t^3$. Calculer la distance $d(g, F) = \inf_{f\in F} \|g - f\|$.