Université d'Orléans 11 Mai 2015
Département de Mathématiques
L4MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen
Première Session
durée : 2 heures
Documents et appareils électroniques interdits

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Questions de cours :

1) Enoncer le théorème de Sylvester sur les formes quadratiques réelles.

2) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que le noyau $\mathrm{Ker}(u^*)$ de l'adjoint u^* de u est l'orthogonal de l'image $\mathrm{Im}(u)$ de u et que l'image $\mathrm{Im}(u^*)$ est l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 1

On considère la forme quadratique $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ donnée par

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 2xy - 2yz + 2xz.$$

1) Ecrire la matrice M de q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Donner l'expression matricielle de la forme polaire f de q.

2) Déterminer le noyau de q.

3) Utiliser l'algorithme de Gauss pour écrire q comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires formant une famille libre.

4) En déduire la signature et le rang de q.

5) Déterminer une base q-orthogonale de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.

2) Pour chacune de ces deux valeurs, donner une description géométrique complète de f_a.

Exercice 3

Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{k}.$$

1) Déterminer une base orthogonale $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ de F.

2) Utiliser cette base orthogonale pour donner une expression de la projection orthogonale $P_F(\mathbf{a})$ sur F d'un vecteur quelconque $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ de $\mathbf{R}^3$. En déduire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_F)$ de P_F dans la base $\mathcal{B}$. Vérifier que $A^2 = A$, ${}^tA = A$ (sinon, vous avez fait une erreur !). Quelle relation existe-t-il entre la trace $\mathrm{Tr}(A)$ et la dimension de F ?

3) Donner la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_F)$ de de la symétrie orthogonale s_F par rapport à F dans la base $\mathcal{B}$.

4) Calculer $P_F(\mathbf{a})$ pour $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

5) En déduire la distance euclidienne du point $(1, 1, 1)$ à F.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel euclidien. On note $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$ et $\|\vec{x}\|$ la norme euclidienne du vecteur $\vec{x} \in E$. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On rappelle que $L(E)$ est un espace vectoriel et une algèbre pour la composition des endomorphismes. Etant donnés $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E$, on note $\theta_{\vec{x},\vec{y}}$ l'endomorphisme de E tel que pour $\vec{z} \in E$,

$$\theta_{\vec{x},\vec{y}}(\vec{z}) = \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle \vec{x}.$$

1) Déterminer le noyau et l'image de $\theta_{\vec{x},\vec{y}}$, où $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont non nuls.

2) Montrer que l'application $\theta : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \theta_{\vec{x},\vec{y}}$ de $E \times E$ dans $L(E)$ est bilinéaire.

3) Montrer les formules

$$\theta_{\vec{x}_1,\vec{y}_1} \circ \theta_{\vec{x}_2,\vec{y}_2} = \langle \vec{y}_1, \vec{x}_2 \rangle \theta_{\vec{x}_1,\vec{y}_2} \quad \text{et} \quad \theta^*_{\vec{x},\vec{y}} = \theta_{\vec{y},\vec{x}}$$

où $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{x}, \vec{y} \in E$.

4) Montrer que si $\|\vec{x}\| = 1$, alors $\theta_{\vec{x},\vec{x}}$ est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(\vec{x})$.

5) Montrer que si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormale de E, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_{\vec{e}_i,\vec{e}_i} = Id_E.$$