L4MT06
Algèbre bilinéaire
et espaces euclidiens

Examen du 11 mai 2015
corrigé

Questions de cours

1) Théorème de Sylvester. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Quelle que soit la base q-orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$, le nombre d'éléments e_i tels que $q(e_i) > 0$ [resp. $q(e_i) < 0$] est le même. On le note s [resp. t]. Le couple (s,t) s'appelle la signature de la forme quadratique.

2) Soit $u \in \mathrm{End}(E)$

$$x \in \mathrm{Ker}(u^*) \iff u^*(x) = 0$$
$$\iff \forall y \in E, \ \langle u^*(x), y \rangle = 0 \quad \text{(car le produit scalaire est non dégénéré)}$$
$$\iff \forall y \in E, \ \langle x, u(y) \rangle = 0$$
$$\iff \forall z \in \mathrm{Im}(u), \ \langle x, z \rangle = 0$$
$$\iff x \in \mathrm{Im}(u)^\perp$$

On a donc $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$

En appliquant cette égalité à u^* et en utilisant $u^{**} = u$,

on obtient $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u^*)^\perp$

Donc $\mathrm{Ker}(u)^\perp = \left(\mathrm{Im}(u^*)^\perp\right)^\perp = \mathrm{Im}(u^*)$

Exercice 1

1) $q(x,y,z) = 2x^2 - 2xy - 2yz + 2xz$

$$= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a donc $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

La forme polaire de q est donnée par

$$f(X,Y) = {}^tX\,M\,Y \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

2) On sait que $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} M$

On resout le système $MX = 0 \iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -1x \quad - z = 0 \\ x - y \quad = 0 \end{cases}$

Par la méthode du pivot de Gauss, on obtient le système équivalent $\begin{cases} y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ d'où $x = y = -z$

ce qui donne $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3)
$$\begin{aligned}
q(x,y,z) &= 2x^2 - 2xy + 2xz - 2yz \\
&= 2\left(x^2 + x(z-y)\right) - 2yz \\
&= 2\left[\left(x + \tfrac{1}{2}(z-y)\right)^2 - \tfrac{1}{4}(z-y)^2\right] - 2yz \\
&= 2\left(x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z\right)^2 - \tfrac{1}{2}(z-y)^2 - 2yz \\
&= \tfrac{1}{2}(2x - y + z)^2 - \tfrac{1}{2}(z^2 - 2yz + y^2) - 2yz \\
&= \tfrac{1}{2}(2x - y + z)^2 - \tfrac{1}{2}(z^2 + 2yz + y^2) \\
&= \tfrac{1}{2}(2x - y + z)^2 - \tfrac{1}{2}(y + z)^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\varphi_1(x,y,z)^2 - \tfrac{1}{2}\varphi_2(x,y,z)^2
\end{aligned}$$

où $\varphi_1(x,y,z) = 2x - y + z$ et $\varphi_2(x,y,z) = y + z$

4) $s = 1$ et $t = 1$

On note que le rang de q est $s + t = 2$, ce qui est conforme à la question 2) où on a vu que le noyau est de dimension 1.

5) On écrit les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ comme des vecteurs-lignes.

On a $\varphi_1 = (2 \ -1 \ 1)$

$\varphi_2 = (0 \ 1 \ 1)$

On complète en une base en prenant

$\varphi_3 = (0 \ 0 \ 1)$

ce qui donne la matrice de changement de base

$$ {}^tQ = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

La base q-orthogonale cherchée est constituée des colonnes de la matrice $P = ({}^tQ)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c.a.d $e_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1) f_a est un endomorphisme orthogonal ssi la matrice A est orthogonale.

Une condition nécessaire est que la première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ ait norme 1, ce qui donne $a^2 = 1$, c.a.d $a = \pm 1$.

On vérifie que les matrices

$$ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

sont bien orthogonales : les vecteurs colonnes de ces matrices forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

2) Comme la matrice B est symétrique, f_1 est une symétrie orthogonale. C'est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel $E_1 = \mathrm{Ker}(f_1 - Id)$ qu'on calcule :

$$ BX = X \iff \begin{cases} z = x \\ y = y \\ x = z \end{cases} \iff z = x $$

C'est l'équation d'un plan vectoriel, noyau de la forme linéaire $\varphi(x,y,z) = x - z$

Donc f_1 est la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - z = 0$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique.

D'après la classification des endomorphismes en dimension 3, f_{-1} est ou bien une rotation d'angle $\neq k\pi$ ou bien une rotation-symétrie d'angle $\neq k\pi$.

On calcule son déterminant

$$\det C = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = 1$$

Donc $C \in SO(3,\mathbb{R})$: c'est une rotation.

L'axe de rotation est la droite vectorielle $E_1 = \mathrm{Ker}(f_{-1} - Id)$

Cela donne $\begin{cases} z = x \\ y = y \\ -x = z \end{cases} \iff \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$

On a donc $E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On oriente l'axe E_1 par le vecteur $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On sait que l'angle de rotation θ satisfait

$$\mathrm{trace}\, C = 1 = 1 + 2\cos\theta \quad , \text{ d'où } \cos\theta = 0 \text{ et } \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$

On sait que $\sin\theta$ a le même signe que

$$\det(\vec{a}, f_{-1}(\vec{a}), \vec{j})$$

où $\vec{a} \notin E_1$. En choisissant $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_{-1}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{a}, f_{-1}(\vec{a}), \vec{j}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \text{ . Donc } \sin\theta > 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2}$$

f_{-1} est la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe orienté $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3

on a $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1) On utilise le procédé d'orthogonalisation de Schmidt

$\vec{e}_1 = \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 2$

$$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \frac{\langle \vec{f}_2, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle} \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pour simplifier les calculs, on prend plutôt $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'après le cours $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthogonale de F

2) La projection orthogonale P_F est donnée par

$$P_F(\vec{a}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle} \vec{e}_1 + \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle}{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle} \vec{e}_2$$

Explicitement, avec $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on trouve

$$P_F(\vec{a}) = \frac{y+z}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2x+y-z}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4x+2y-2z \\ 2x+4y+2z \\ -2x+2y+4z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donc $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On vérifie que $A^2 = A$, ${}^tA = A$ et trace $A = 2 = \dim F$

3) $s_F = 2P_F - Id \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_F) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $P_F(\vec{a}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) $d(\vec{a}, F)^2 = \| \vec{a} - P_F(\vec{a}) \|^2 = \| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \|^2 = \frac{1}{3}$

$d(\vec{a}, F) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 4

1) Notez que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont fixés !

$\vec{z} \in \operatorname{Ker} \theta_{\vec{x}, \vec{y}} \iff \theta_{\vec{x}, \vec{y}}(\vec{z}) = \vec{0}$

$\iff \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle \vec{x} = \vec{0}$

$\iff \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle = 0$ car $\vec{x} \neq \vec{0}$

$\iff \vec{z} \perp \vec{y}$

Donc $\operatorname{Ker} \theta_{\vec{x}, \vec{y}} = \operatorname{Vect}(\vec{y})^{\perp}$

$\operatorname{Im} \theta_{\vec{x}, \vec{y}} = \{ \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle \vec{x} \ , \ \vec{z} \in E \}$

Il est contenu dans $\operatorname{Vect}(\vec{x})$. Comme $\vec{y} \neq \vec{0}$, la forme linéaire $\vec{z} \mapsto \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle$ est surjective. Donc $\operatorname{Im} \theta_{\vec{x}, \vec{y}} = \operatorname{Vect}(\vec{x})$

2) Il suffit de l'écrire. Par exemple

$$\theta_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y}(z) = \langle z, y \rangle (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$
$$= \lambda_1 \langle z, y \rangle x_1 + \lambda_2 \langle z, y \rangle x_2$$
$$= \lambda_1 \theta_{x_1, y}(z) + \lambda_2 \theta_{x_2, y}(z)$$

Pour tout $z \in E$, on a

3) $$\theta_{x_1, y_1} \circ \theta_{x_2, y_2}(z) = \theta_{x_1, y_1}(\theta_{x_2, y_2}(z))$$
$$= \theta_{x_1, y_1}(\langle z, y_2 \rangle x_2)$$
$$= \langle z, y_2 \rangle \theta_{x_1, y_1}(x_2)$$

$$= \langle z, y_2 \rangle \langle x_2, y_1 \rangle x_1$$

$$= \langle y_1, x_2 \rangle \langle z, y_2 \rangle x_1$$

$$= \langle y_1, x_2 \rangle \, \theta_{x_1, y_2}(z)$$

d'où l'egalité des applications :

$$\theta_{x_1, y_1} \circ \theta_{x_2, y_2} = \langle y_1, x_2 \rangle \, \theta_{x_1, y_2}$$

De même, pour $z, w \in E$, on a

$$\langle \theta_{y,x}(z), w \rangle = \langle \langle z, x \rangle y, w \rangle$$
$$= \langle z, x \rangle \langle y, w \rangle$$

$$\langle z, \theta_{x,y}(w) \rangle = \langle z, \langle w, y \rangle x \rangle$$
$$= \langle w, y \rangle \langle z, x \rangle$$

Par définition de l'adjoint d'un endomorphisme

$$\theta_{x,y}^{*} = \theta_{y,x}$$

4) Comme $(\vec{x})$ est une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(\vec{x})$,

$$P_F(\vec{y}) = \frac{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \vec{x} = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \vec{x} = \theta_{\vec{x}, \vec{x}}(\vec{y})$$

Donc $P_F = \theta_{\vec{x}, \vec{x}}$

5) Appliquons $\sum_{i=1}^{n} \theta_{\vec{e}_i, \vec{e}_i}$ à un vecteur $\vec{x} \in E$:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_{\vec{e}_i, \vec{e}_i}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

c'est exactement l'écriture de $\vec{x}$ dans la base orthonormale $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$: $\sum_{i=1}^{n} \theta_{\vec{e}_i, \vec{e}_i}(\vec{x}) = \vec{x}$. D'où $\sum_{i=1}^{n} \theta_{\vec{e}_i, \vec{e}_i} = Id_E$