Université d'Orléans 5 Mai 2014
Département de Mathématiques
L4MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen
Première Session
durée : 2 heures
Documents et appareils électroniques interdits

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Questions de cours :

1) Enoncer le théorème de Sylvester sur les formes quadratiques réelles.

2) Donner 4 propriétés équivalentes caractérisant un endomorphisme orthogonal $u \in \mathcal{L}(E)$ d'un espace vectoriel euclidien E.

Exercice 1

On considère la forme quadratique $q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ donnée par

$$q(x, y, z, t) = 2xy + 2xz + 2xt + 2yt + 2zt.$$

1) Utiliser l'algorithme de Gauss pour écrire q comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires formant une famille libre.

2) En déduire la signature et le rang de q.

3) Ecrire la matrice M de la forme polaire f de q dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Donner l'expression matricielle de f.

4) Déterminer le noyau de q.

Exercice 2

On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure usuelle d'espace vectoriel euclidien orienté. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ défini par la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) L'endomorphisme f est-il symétrique ? Montrer que f est un endomorphisme orthogonal.

2) Donner une description géométrique complète de cet endomorphisme.

3) Donner une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f a une forme réduite. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 3

Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

1) Déterminer une base orthogonale $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ de F.

2) Utiliser cette base orthogonale pour donner une expression de la projection orthogonale $P_F(\mathbf{a})$ sur F d'un vecteur quelconque $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ de $\mathbf{R}^3$. En déduire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_F)$ de P_F dans la base $\mathcal{B}$. Vérifier que $A^2 = A$, ${}^tA = A$ (sinon, vous avez fait une erreur !). Quelle relation existe-t-il entre la trace $\mathrm{Tr}(A)$ et la dimension de F ?

3) Donner la matrice de la symétrie orthogonale s_F par rapport à F dans la base $\mathcal{B}$.

4) Calculer $P_F(\mathbf{a})$ pour $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

5) En déduire la distance euclidienne du point $(1, 2, 3)$ à F.

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles. On munit E du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

et on note $\|.\|$ la norme associée. On note f_1 et f_2 les fonctions définies par $f_1(t) = 1$ et $f_2(t) = t$ pour $t \in [0,1]$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par f_1 et f_2.

1) Déterminer une base orthogonale de F.

2) Utiliser cette base orthogonale pour donner une expression de la projection orthogonale $P_F(g)$ sur F d'une fonction quelconque $g \in E$.

3) Soit $g \in E$. Montrer qu'il existe des réels uniques a, b tels que :

$$\inf_{\lambda, \mu \in \mathbf{R}} \int_0^1 (\lambda + \mu t - g(t))^2 dt = \int_0^1 (a + bt - g(t))^2 dt.$$

4) Soit g la fonction définie par $g(t) = \sqrt{t}$ pour $t \in [0,1]$. Calculer explicitement les réels a et b de la question 3).