L4MT06

EXAMEN
5 mai 2014

Questions de cours

1) Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E de dimension finie n.

Il existe deux entiers s et t et une base q-orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ tels que

$q(e_i) = 1 \quad 1 \leq i \leq s \quad , q(e_i) = -1 \quad s+1 \leq i \leq s+t \quad , q(e_i) = 0 \quad s+t+1 \leq i \leq n$

De plus le couple (s,t) ne dépend pas de la base choisie et $s+t =$ rang de q

2) Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

a) $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$

b) $\forall x, y \in E \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

c) u est inversible et $u^{-1} = u^*$

d) il existe une base ON $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ telle que $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), .., u(e_n))$ soit une base ON

e) pour toute base ON $\mathcal{B}$, $u(\mathcal{B})$ est une base ON.

Exercice 1

1) On s'occupe des variables x et y (il n'y a pas de carrés)

$q = 2x(y+z+t) + \text{etc}$

$\quad = 2y(x+t) + \text{etc}$

$\quad = 2(x+t)(y+z+t) - 2t^2$

$\quad = \frac{1}{2}\left[(x+y+z+2t)^2 - (x-y-z)^2\right] - 2t^2$

$\quad = \frac{1}{2}\varphi_1(x,y,z,t)^2 - \frac{1}{2}\varphi_2(x,y,z,t)^2 - 2\varphi_3(x,y,z,t)^2$

où $\varphi_1(x,y,z,t) = x+y+z+2t$

$\quad \varphi_2(x,y,z,t) = x-y-z$

$\quad \varphi_3(x,y,z,t) = t$

D'après le cours $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une famille libre

2) signature$(q) = (1,2)$

rang$(q) = (1+2) = 3$

3)
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(X,Y) = {}^tX\,M\,Y$$

où on a posé $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

4) $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} M$ $\quad$ Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$MX = 0 \iff \begin{cases} y + z + t = 0 \\ x + t = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff X = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc le noyau de q est la droite $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

NB : Comme $\operatorname{rang}(q) = 3$, on savait déjà que le noyau de q est de dimension 1.

Exercice 2

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) les colonnes de A forment une base ON de $\mathbb{R}^3$. Donc A est une matrice orthogonale. Comme la matrice de f dans une base ON est orthogonale, f est un endomorphisme orthogonal.

La matrice A n'est pas symétrique. Donc f n'est pas un endomorphisme symétrique

2) Comme f n'est pas une symétrie orthogonale, elle ne peut être que
ou bien une rotation d'angle θ non multiple de π
ou bien une rotation-symétrie d'angle θ non multiple de π

Déterminons le sous-espace $E_1 = \operatorname{Ker}(f - Id)$

$$AX = X \iff \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 3

1) On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt :

$$\vec{e}_1 = \vec{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \frac{\langle f_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle}\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Pour simplifier les calculs, il vaut mieux prendre

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

2) Le projecteur orthogonal de $\vec{a}$ sur $F = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est

donné par $$P_F(\vec{a}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1\rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle}\vec{e}_1 + \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_2\rangle}{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle}\vec{e}_2$$

Explicitement, avec $\vec{a} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, cela donne

$$P_F(\vec{a}) = \frac{x+y+z}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{x-2y+z}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+z\\2y\\x+z\end{pmatrix}$$

D'où la matrice de P_F : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix} = A$

On vérifie que $A^2 = A$ et ${}^tA = A$

On a $\mathrm{Trace}(A) = \frac{1}{2}(1+2+1) = 2 = \dim F$

3) $s_F = 2P_F - Id_E$, donc la matrice $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_F)$ est

$$S = 2A - Id_3 = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

4) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow P_F(\vec{a}) = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

5) $d(\vec{a}, F) = \|\vec{a} - P_F(\vec{a})\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$

Donc E_1 est une droite vectorielle.

Necessairement f est une rotation autour de E_1.

On oriente E_1 par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour pouvoir définir l'angle θ de la rotation. On rappelle qu'une base de $E_1^{\perp}$, disons $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, est directe si la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u})$ de $\mathbb{R}^3$ est directe.

On sait que

$$1 + 2\cos\theta = \mathrm{Trace}(A) = 2 \quad , \text{d'où} \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{et } \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$

Il reste à déterminer le sens de la rotation. Il suffit de connaître le signe de $\sin\theta$. On sait que c'est le signe du déterminant $\det(\vec{v}, f(\vec{v}), \vec{u})$ pour n'importe quel vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$.

On prend $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\vec{v}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{v}, f(\vec{v}), \vec{u}) = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Donc f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) On pose $\vec{e}_3 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On prend $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ tels que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit une base ON directe.

Par exemple $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

La matrice de f dans une telle base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1) On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt

$e_1 = f_1$ c.a.d $e_1(t) = 1$

$$e_2 = f_2 - \frac{<f_2, e_1>}{<e_1, e_1>} e_1$$

On a $<e_1, e_1> = \int_0^1 1.1\, dt = 1$

$<f_2, e_1> = \int_0^1 t.1\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$e_2 = f_2 - \frac{1}{2} e_1$ c.a.d $e_2(t) = t - \frac{1}{2}$

2) $$P_F(g) = \frac{<g, e_1>}{<e_1, e_1>} e_1 + \frac{<g, e_2>}{<e_2, e_2>} e_2$$

où $<g, e_1> = \int_0^1 g(t)\, dt$, $<g, e_2> = \int_0^1 g(t)(t - \frac{1}{2})\, dt$, $<e_1, e_1> = 1$, $<e_2, e_2> = \frac{1}{12}$

3) on peut écrire

$$\int_0^1 (\alpha + \beta t - g(t))^2 dt = \| f - g \|^2 \quad \text{où } f(t) = \alpha + \beta t$$

Il s'agit donc de déterminer $f_0 \in F$ tel que

$$\| f_0 - g \|^2 = \inf_{f \in F} \| f - g \|^2$$

D'après un théorème du cours, le minimum de la distance de g à un élément de F est réalisé par la projection orthogonale $P_F(g) = f_0$.

Donc $$f_0 = P_F(g) = \frac{<g, e_1>}{1} 1 + \frac{<g, e_2>}{1/12} (t - \frac{1}{2})$$

$$= (<g, e_1> - 6<g, e_2>) 1 + 12 <g, e_2> t$$

4) $g(t) = \sqrt{t}$

$$\langle g, e_1 \rangle = \int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\langle g, e_2 \rangle = \int_0^1 \sqrt{t}\, \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t}\, dt$$

$$= \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6-5}{5 \times 3} = \frac{1}{15}$$

$$a = \langle g, e_1 \rangle - 6 \langle g, e_2 \rangle = \frac{2}{3} - 6 \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

$$b = 12 \langle g, e_2 \rangle = \frac{12}{15}$$