Université d'Orléans 7 Mai 2013
Département de Mathématiques
L4MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen
Première Session
durée : 2 heures
Documents et appareils électroniques interdits

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Questions de cours :

1) Enoncer le principe d'orthogonalisation de Schmidt.

2) Qu'est-ce-qu'un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien ? Que pouvez-vous dire sur la diagonalisation des endomorphismes symétriques ?

Exercice 1

Soit $E = \mathbf{R}^4$, $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ sa base canonique et $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*, \epsilon_4^*)$ la base duale.

1. On considère les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sur E définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcrcrcrcr} \varphi_1(x,y,z,t) & = & x & - & y & + & z & - & 2t \\ \varphi_2(x,y,z,t) & = & x & - & y & - & 2z & + & t \\ \varphi_3(x,y,z,t) & = & 2x & - & 2y & - & z & - & t \end{array}\right.$$

a) Déterminer les coordonnées de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dans la base $\mathcal{B}_0^*$.

b) La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ?

2. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in E : x - y + z - 2t = x - y - 2z + t = 2x - 2y - z - t = 0\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer la dimension de F puis une base de F.

3. On considère la forme quadratique q définie sur E par

$$q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + t^2 - 2xy + 2xt - 2yt + 4zt.$$

a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.

b) Déterminer l'orthogonal de F pour q. Quelle est sa dimension ?

c) Peut-on en déduire une information sur la dégénérescence de q ?

d) Déterminer la signature de q.

e) Déterminer le rang et le noyau de q.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.

2. Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de f_a.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit $u \in O(E)$ un endomorphisme orthogonal de E. On suppose que pour tout $x \in E$, le vecteur $u(x)$ est orthogonal à x.

1. Donner un exemple d'un tel u quand $E = \mathbf{R}^2$ est muni du produit scalaire usuel.

2. On considère φ définie sur $E \times E$ par :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(\langle x, u(y)\rangle + (\langle u(x), y\rangle)\big).$$

   a) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
   b) Quelle est la forme quadratique associée ?
   c) En déduire que $u^* = -u$.

3. En déduire que n est pair.

4. Montrer que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.