Université d'Orléans 10 Mai 2011
Département de Mathématiques
L4MA02 Algèbre III

Examen
Première Session
durée : 2 heures
Documents et appareils électroniques interdits

Questions de cours :

1) Enoncer le théorème de Sylvester sur les formes quadratiques réelles.

2) Qu'est-ce-qu'un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien ? Que pouvez-vous dire sur la diagonalisation des endomorphismes symétriques ?

Exercice 1

Soient φ_1, φ_2 et φ_3 les formes linéaires sur $E = \mathbf{R}^3$ définies par

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) & = & x - y \\ \varphi_2(x,y,z) & = & y + z \\ \varphi_3(x,y,z) & = & x + z \end{cases}$$

a) Déterminer les coordonnées de chaque φ_i dans la base $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*)$ duale de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

b) La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ?

c) Déterminer la dimension de $F = \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_3)$.

d) On pose $q = \varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_3^2$. Montrer que q est une forme quadratique sur E.

e) Déterminer la signature, le rang et le noyau de q.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2a & 2 \\ -2 & -a & -2 \\ 2 & -2a & -1 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.

b) Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de f_a.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $u \in L(E)$.

a) Montrer que u^*u (c'est l'endomorphisme composé $u^* \circ u$) admet une base orthonormale de vecteurs propres $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

b) Montrer que toute valeur propre de u^*u appartient à $\mathbf{R}_+$.

c) Pour $i = 1, \dots, n$, on note λ_i la valeur propre de u^*u associée au vecteur propre e_i. On suppose $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Calculer $\|x\|^2$ et $\|u(x)\|^2 - \lambda_1 \|x\|^2$ en fonction des x_i et des λ_i.

d) Montrer que $\|u(x)\|^2 \leq \lambda_1 \|x\|^2$.

e) Montrer que $\|u(x)\|^2 = \lambda_1 \|x\|^2$ si et seulement si x est dans le sous-espace propre de u^*u associé à la valeur propre λ_1.

f) En déduire que $\lambda_1 = \max\{\|u(x)\|^2 : x \in E, \|x\| = 1\}$.

Exercice 4

Soit $E = C([0,1])$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles. On munit E du produit scalaire défini par $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ pour $f, g \in E$ et on note $\|.\|$ la norme associée. On note ϵ_0, ϵ_1 les fonctions définies par $\epsilon_0(t) = 1$ et $\epsilon_1(t) = t$ pour $t \in [0,1]$.

a) Déterminer une base orthogonale (e_0, e_1) du sous-espace vectoriel F engendré par ϵ_0 et ϵ_1.

b) Exprimer à l'aide du produit scalaire les coordonnées (a_0, a_1) dans la base (e_0, e_1) de la projection orthogonale $P_F(g)$ sur F d'un élément $g \in E$ quelconque.

c) Soit $d(g, F) = \inf_{f \in F} \|g - f\|$ la distance de g à F. Calculer $d(g,F)^2$ en fonction de $\|g\|^2$ et de $\|P_F(g)\|^2$.

d) Calculer explicitement $P_F(g)$ et $d(g,F)$ pour la fonction g définie par

$$g(t) = \frac{1}{t-2}, \qquad t \in [0,1].$$