Département de Mathématiques **SCLO4 MA 02 : Algèbre III**
Université d'Orléans **2008-2009**

Première Session

Documents et calculatrices interdits

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Questions de cours :

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et H un sous-espace vectoriel de E.
   Enoncer quatre conditions équivalentes à " H est un hyperplan de E".
2. Enoncer le principe d'orthogonalisation de Schmidt.
3. Soit E un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q admettant f pour forme polaire. Soien A et B des parties de E.
   (a) Si $A \subset B$, comparer $A^\perp$ et $B^\perp$. Donner une démonstration.
   (b) Comparer $A^\perp$ et $(\mathrm{Vect}(A))^\perp$. Donner une démonstration.

Exercice I :

Soient $E = \mathbb{R}^4$, sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ et $\mathcal{B}_0^* = (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \varepsilon_4^*)$ la base duale de $\mathcal{B}_0$.

1. On considère les formes linéaires $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ sur E définie par :
   $\forall u = (x, y, z, t) \in E \qquad \varphi_1(u) = x - 2y + z - t \quad , \quad \varphi_2(u) = x + y - 2z - t$ et $\varphi_3(u) = 2x - y - z - 2t$.
   (a) Déterminer les coordonnées de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ dans la base $\mathcal{B}_0^*$.
   (b) La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ?
2. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in E\,;\ x - 2y + z - t = x + y - 2z - t = 2x - y - z - 2t = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Déterminer la dimension de F, puis une base de F.
3. On considère la forme quadratique q définie par :
   $\forall u = (x, y, z, t) \in E \qquad q(u) = x^2 + y^2 + t^2 + 2xy - 2xt + 4yz - 2yt.$
   (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.
   (b) Déterminer l'orthogonal de F pour q. Quelle est sa dimension ?
   (c) Peut-on en déduire une information sur la dégénérescence de q ?
   (d) Déterminer la signature de q.
   (e) Déterminer le rang et le noyau de q.

Exercice II : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -a & -2a & 2a \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.
2. Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de f_a.

Exercice III :

Dans tout cet exercice E désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.
Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'un endomorphisme u de E est une *similitude de rapport* k si $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = k\,\|x\|$.
On dit qu'un endomorphisme v de E *conserve l'orthogonalité* si : pour tout $(x, y) \in E^2$, x orthogonal à y implique $v(x)$ orthogonal à $v(y)$.

1. Soient x et y des vecteurs de E. Montrer que les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux si et seulement si x et y ont même norme.
2. Soit u une similitude de rapport k.
   (a) Montrer que $w = \dfrac{1}{k}u$ est un endomorphisme orthogonal.
   (b) En déduire que u est bijective et exprimer u^{-1} en fonction de u^*.
   (c) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle\, u(x)\,,\, u(y)\,\rangle = k^2\langle\, x\,,\, y\,\rangle$.
   (d) En déduire que u conserve l'orthogonalité.
3. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ non nul et conservant l'orthogonalité.
   (a) On suppose que v n'est pas bijectif.
      (i) Montrer qu'il existe $x \notin \operatorname{Ker}(v)$ avec $\|x\| = 1$.
      (ii) Montrer qu'il existe $y \in \operatorname{Ker}(v)$ avec $\|y\| = 1$.
      (iii) Montrer que l'on aboutit à une contradiction. (On pourra utiliser la question 1)
   (b) En déduire que v est bijectif.
   (c) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
      (i) Montrer que $\mathcal{B}' = (v(e_1), \ldots, v(e_n))$ est une base de E.
      (ii) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base orthogonale de E.
      (iii) Soit $j \in [2, n]_{\mathbb{N}}$. Montrer que les vecteurs $v(e_1 + e_j)$ et $v(e_1 - e_j)$ sont orthogonaux.
      (iv) En déduire que tous les vecteurs de $\mathcal{B}'$ ont même norme.
      On notera k cette valeur commune.
      (v) Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ un vecteur de E. Calculer $\|x\|^2$ et $\|v(x)\|^2$ en fonction des x_i et de k.
4. Quelle caractérisation des similitudes vient-on de démontrer ?