Département de Mathématiques
Université d'Orléans

L4 MT 02 : Algèbre III
2007-2008

Première Session

Jeudi 22 Mai 2008

11h-13h

Documents et calculatrices interdits

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Questions de cours :

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E.
   (a) Donner la définition de e_j^*, $j^{\text{ème}}$ forme coordonnée relative à $\mathcal{B}$.
   (b) Démontrer que $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*.
   (c) Indiquer les formules donnant la décomposition d'un vecteur $x \in E$ dans $\mathcal{B}$ et d'une forme linéaire $\psi \in E^*$ dans $\mathcal{B}^*$.
2. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Donner cinq conditions équivalentes à : *u est un endomorphisme orthogonal*.

Exercice I :

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2a \\ 2 & 1 & 2a \\ 2 & -2 & -a \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.
2. Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de f_a.

Exercice II :

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel et de $\mathcal{B}_0$ sa base canonique.
On considère les vecteurs $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,0,1,0)$, $u_3 = (1,1,1,-1)$ et $F = \mathrm{Vect}(\{u_1, u_2, u_3\})$.

1. (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
   (b) Déterminer une base orthogonale de F.
   (c) Déterminer la projection orthogonale de $u = (1,1,0,0)$ sur F.
2. On considère la forme quadratique q définie sur E par :
$$\forall (x,y,z,t) \in E \quad q(x,y,z,t) = x^2 + z^2 + t^2 + 2xz + 2xt + 4yz + 6zt\,.$$
   (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.
   (b) Déterminer l'orthogonal de F pour q. Quelle est sa dimension ?
   (c) Que peut-on en déduire sur la dégénérescence de la forme quadratique q ?
3. (a) Déterminer la signature, le rang et le noyau de q.
   (b) Déterminer une base de E qui soit q-orthogonale.

Exercice III :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E et S(E) l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

1. Soit $s \in S$(E). Redémontrer l'équivalence des deux assertions suivantes :
   (a) toutes les valeurs propres de s sont positives ou nulles.
   (b) $\forall x \in E \quad \langle s(x), x \rangle \geqslant 0$.

On désignera par S^+(E) l'ensemble des $s \in S$(E) satisfaisant à ces deux conditions équivalentes.

2. Soient $s \in S^+$(E) et $x \in E$. Montrer que $x \in \text{Ker}(s)$ si et seulement si $\langle s(x), x \rangle = 0$.
   (On pourra décomposer x dans une base orthonormale bien choisie).

On note $\mathcal{B}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \,;\, \forall x \in E \quad \|f(x)\| \leqslant \|x\|\}$.

3. (a) A-t-on $O(E) \subset \mathcal{B}(E)$?
   (b) A-t-on S(E) $\subset \mathcal{B}(E)$?
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Montrer que $f^* \circ f$ appartient à S^+(E).
   (b) Montrer que $\text{Id}_E - f^* \circ f$ appartient à S(E).
   (c) Montrer que $f \in \mathcal{B}(E)$ si et seulement si $\text{Id}_E - f^* \circ f$ appartient à S^+(E).

Dans toute la suite on considère $f \in \mathcal{B}(E)$.

5. (a) Montrer que, pour tout $x \in E$ on a $\|f^*(x)\|^2 \leqslant \|f^*(x)\| \, \|x\|$.
   (b) En déduire que f^* appartient à $\mathcal{B}(E)$.
6. Soient $E_f = \{x \in E \,;\, \|f(x)\| = \|x\|\}$ et $E_{f^*} = \{x \in E \,;\, \|f^*(x)\| = \|x\|\}$.
   (a) Montrer que $E_f = \text{Ker}(\text{Id}_E - f^* \circ f)$.
   (b) Montrer que $E_{f^*} = \text{Ker}(\text{Id}_E - f \circ f^*)$.
   (c) En déduire que E_f et E_{f^*} sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (d) Montrer que $f(E_f) = E_{f^*}$ et $f^*(E_{f^*}) = E_f$.
   (e) En déduire que E_f et E_{f^*} ont même dimension.