Université d'Orléans 21 Juin 2016
Département de Mathématiques
L4MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen
Deuxime Session
durée : 2 heures
Documents et appareils électroniques interdits

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien. Que peut-on dire sur la diagonalisation d'un endomorphisme symétrique ?

2. Enoncer et démontrer le théorème de Pythagore dans un espace préhilbertien réel.

3. Donner la définition d'une forme quadratique q sur un espace vectoriel réel E. Donner une formule de polarisation.

Exercice 1

Etant donné un nombre réel a, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la forme quadratique $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ qui a A pour matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer la signature de q et son rang en fonction de a.
3. Montrer qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle la forme quadratique est positive. La forme quadratique q est-elle alors définie positive ?

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & -2a & 2a \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.

b) Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de f_a.

Exercice 3

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 du produit scalaire $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$ pour construire une base orthogonale de $(E, <, >)$.

Exercice 4

Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

1) Montrer que la famille $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ est libre.

2) Déterminer $F^{\perp}$.

3) Déterminer une base orthogonale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de F. En déduire une base orthogonale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

4) Soit $X = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbf{R}^3$. Calculer les projections orthogonales $P_F(X)$ de X sur F et $P_{F^{\perp}}(X)$ de X sur $F^{\perp}$.

5) Déterminer la matrice, relativement à $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale P_F sur F. Que vaut sa trace ?

6) Déterminer la matrice, relativement à $\mathcal{B}$, de la symétrie orthogonale par rapport à F.