Examen - Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens
L2 - Math - 2012-2013 - Session 2

**Remarques.**

- On ne demande pas de détailler les éventuelles preuves de bilinéarité ou de linéarité des applications rencontrées.
- On vous invite par contre à vérifier de votre côté la justesse de certains résultats lorsqu'ils sont cruciaux pour la suite de l'exercice.

**Cours**

1. On se place dans un espace vectoriel $E$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On considère une forme quadratique $q$ définie sur $E$. Comment est définie la matrice $M$ de $q$ dans la base $\mathcal{B}$ ?
2. Donner un énoncé du théorème de Pythagore dans un espace euclidien $E$.

**Exercice 1.** On considère la forme quadratique $q$ définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 4yz + 4yt + 6zt.$$

1. Donner la signature de $q$.
2. Donner le rang de $q$.
3. La forme polaire de $q$ est-elle un produit scalaire ?
4. Donner une base du noyau de $q$.

**Exercice 2.** On considère la forme quadratique $q$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$q(x, y) = x^2 + y^2 - (x - y)^2.$$

1. Donner la signature de $q$.
2. Donner le rang de $q$.
3. Décrire le noyau de $q$.

**Exercice 3.** On se place dans l'espace $E$ des polynômes de degré au plus 10. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P$ dans $E$ tel que, pour tout $Q$ dans $E$, on ait :

$$Q(0) + Q'(1) + Q''(2) = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)dt.$$

**Exercice 4.** Soient $p_1, \ldots, p_n$ des réels de somme égale à 1.

1. On considère l'application $\phi$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i y_i.$$

À quelle condition sur les $p_i$ cette application est-elle un produit scalaire ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

2. Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des réels. Montrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i^2\right)^{1/2}.$$

3. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Montrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\right)^{1/2}.$$

**Exercice 5.** Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

On note $a_0$ et $a_1$ les éléments de $E$ définis par $a_0(t) = 1$ et $a_1(t) = t$. On note $F$ l'espace vectoriel engendré par $a_0$ et $a_1$.

1. Donner une base orthogonale de $F$.
2. Donner une base orthonormale de $F$.
3. On note $a_2$ l'élément de $E$ défini par $t \mapsto t^2$. Déterminer la projection orthogonale de $a_2$ sur $F$.
4. Montrer qu'il existe des réels uniques $\alpha_0^0$ et $\alpha_1^0$, que l'on précisera, tels que :

$$\inf_{\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}} \int_0^1 \left(\alpha_0 + \alpha_1 t - t^2\right)^2 dt = \int_0^1 \left(\alpha_0^0 + \alpha_1^0 t - t^2\right)^2 dt.$$

**Exercice 6.** On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $s$ la symétrie orthogonale par rapport à $u_0 = (1,1,1)$. On note $M$ la matrice de $s$ dans la base canonique. On considère la forme quadratique $q$ sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(u) = \langle u, s(u) \rangle$.

1. Donner $M$.
2. Donner $M^2$.
3. Quelle est la forme polaire de $q$ ?
4. Quelle est la signature de $q$ ?