Université d'Orléans
Département de Mathématiques
25 Juin 2012
L4MA02 Algèbre III

**Examen**
**Deuxième Session**
durée : 2 heures
*Documents et appareils électroniques interdits*

**Questions de cours :**

1) Soient $E$ un espace vectoriel euclidien et $u$ un endomorphisme de $E$. Enoncer 4 conditions équivalentes à : "$u$ est un endomorphisme orthogonal".

2) Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $(E, <, >)$. Donner la définition de la symétrie orthogonale $s_F$ par rapport à $F$.

**Exercice 1**

On considère la forme quadratique $Q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ donnée par

$$Q(x, y, z, t) = xy + 2xz + xt + 2yt + 4zt.$$

1) Utiliser l'algorithme de Gauss pour écrire $Q$ comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires formant une famille libre.

2) En déduire la signature et le rang de $Q$

3) Déterminer le noyau $N(Q)$.

**Exercice 2**

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 du produit scalaire $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$ pour construire une base orthogonale de $(E, <, >)$.

**Exercice 3**

Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, on considère le sous-espace vectoriel $F$ engendré par les vecteurs

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Déterminer la matrice, relativement à $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale sur $F$ et de la symétrie orthogonale par rapport à $F$.

**Exercice 4**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on considère l'endomorphisme $f_a$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -a & -2a & 2a \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer qu'il existe deux valeurs de $a$ pour lesquelles $f_a$ est un endomorphisme orthogonal.

b) Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de $f_a$.