Département de Mathématiques
Université d'Orléans

L4 MT 02 : Algèbre III
2005-2006

Première Session

Mardi 6 Juin 2006

14h-16h

Documents et calculatrices interdits

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Questions de cours :

1. Enoncer le principe d'orthogonalisation de Schmidt.
2. Enoncer et démontrer le théorème d'interpolation de Lagrange.

Exercice I :

On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et les formes linéaires sur E définies par : $\forall v = (x, y, z) \in E \quad \varphi_1(v) = x - y \quad ; \quad \varphi_2(v) = y + z \quad ; \quad \varphi_3(v) = x + z$.

1. Déterminer les coordonnées de chaque φ_i dans la base $\mathcal{B}_0^* = (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*)$ duale de $\mathcal{B}_0$.
2. La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ?
3. Déterminer la dimension de $F = \mathrm{Ker}\,(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi_2) \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi_3)$.
4. On pose $q = \varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_3^2$. Montrer que q est une forme quadratique sur E.
5. Déterminer la signature, le rang et le noyau de q.

Exercice II :

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la nature géométrique de f.

Problème

Un endomorphisme u d'un espace euclidien est dit *normal* si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. (a) Un endomorphisme symétrique est-il normal ?
   (b) Un endomorphisme orthogonal est-il normal ?
   (c) Soient P un plan euclidien rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(P)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(f) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Montrer que si f est normal et non symétrique alors $d = a$ et $c = -b$.

Dans toute la suite E est un espace euclidien.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose dans cette question que u est un endomorphisme <u>normal</u>.

   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

   (b) Montrer que $\operatorname{Ker}(u^*) = \operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u^*) = \operatorname{Im}(u)$.

   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est normal.

   (d) Montrer que si $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, alors $\lambda \in \operatorname{Sp}(u^*)$ et $E_\lambda(u) = E_\lambda(u^*)$.

   (e) En déduire que si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u alors $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

3. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f et par f^*.

   (a) Montrer que $F^\perp$ est stable par f et par f^*.

   (b) Soit g l'endomorphisme de F défini par la restriction de f et soit g' l'endomorphisme de F défini par la restriction de f^*, c'est à dire :

   $$g : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & f(y) \end{array} \quad \text{et} \quad g' : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & f^*(y) \end{array}.$$

   Montrer que g' est l'adjoint de g.

   (c) En déduire que si f est normal alors $g \in \mathcal{L}(F)$ est normal.

Dans toute la suite $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme <u>normal</u>. Posons $G = \underset{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)}{\oplus} E_\lambda(u)$ et $F = G^\perp$.

4. (a) Dans le cas où $F = \{0\}$, que peut-on dire de u ?

Dans la suite on suppose $F \neq \{0\}$.

   (b) Montrer que G est stable par u et par u^*.

   (c) Montrer que F est stable par u et par u^*.

On désigne par v l'endomorphisme de F défini par la restriction de u.

   (d) Montrer que v est normal.

   (e) Montrer que v ne possède pas de valeur propre.

On pose $s = v^* \circ v$.

   (f) Montrer que s est un endomorphisme de F diagonalisable dans une base orthonormale.

Soient α une valeur propre de s et F_α le sous-espace propre associé à α.

5. (a) Montrer que F_α et son orthogonal dans F sont stables par v et v^*.

On désigne par w l'endomorphisme de F_α défini par la restriction de v.

   (b) Montrer que w ne possède pas de valeur propre.

   (c) Montrer qu'il existe un plan P stable par w.

   (d) Soit x un vecteur non nul de P. Montrer que $(x, w(x))$ est une base de P.

   (e) Montrer qu'il existe $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que $w^2(x) = \beta x + \gamma w(x)$.

   (f) Montrer que $(w(x), w^2(x))$ est une base de P.

   (g) En déduire que P est stable par w^*.

   (h) On désigne par f l'endomorphisme de P défini par la restriction de w. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de P telle que : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(*)$.

6. **Question facultative.** Montrer que E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u et de plans stables pour lesquels la restriction de u a une matrice de la forme $(*)$.