Université d'Orléans

Mathématiques

L2 MT06

Corrigé de l'examen partiel du 16 mars 2018

Question de cours

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Alors

i) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_s & & 0 \\ & -I_t & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ où s, t sont des entiers ≥ 0 et I_s est la matrice identité d'ordre s.

ii) Le couple (s,t) ne dépend que de q

iii) $rang(q) = s + t$.

Remarque : (s,t) s'appelle la signature de q.

Exercice 1

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $D = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in D^{\perp} \iff (x\ y\ z\ t)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\iff (x\ y\ z\ t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$\iff t = 0$

a) $D^{\perp}$ est donc l'hyperplan $t = 0$. Sa dimension est $4 - 1 = 3$

b) $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ est une base de $D^{\perp}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in (D^{\perp})^{\perp} \iff (x\ y\ z\ t)\, A \vec{\varepsilon}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$

$\iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y + z + 2t = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y + z + 2t = 0 \end{cases}$

car la troisième ligne est redondante

Comme les formes linéaires $\varphi_1 = (1\ {-1}\ {-1}\ 0)$ et $\varphi_2 = (-1\ 1\ 1\ 2)$ forment une famille libre

$\dim D^{\perp\perp} = \dim Ker\varphi_1 \cap Ker\varphi_2 = \dim E - \dim Vect(\varphi_1, \varphi_2) = 4 - 2 = 2$

$\dim D^{\perp\perp} = 2$

d) On a $\dim D^{\perp} + \dim D^{\perp\perp} = 3 + 2 = 5 \neq 4 = \dim E$

Le cours dit que si q est non dégénérée, $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$ pour tout sev F. Donc q est dégénérée.

On peut aussi remarquer que $D \neq D^{\perp\perp}$ pour déduire ce résultat.

3. a) Avec la convention du cours, on écrit les formes linéaires comme des vecteurs-lignes :

$\varphi_1 = [1\ -1\ -1\ 0]$
$\varphi_2 = [0\ 1\ 0\ 1]$
$\varphi_3 = [0\ 1\ 0\ -1]$
$\varphi_4 = [0\ 0\ 1\ 0]$

b) $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^* car le déterminant de la matrice de ses coefficients est non nul, comme le montre le calcul de l'inverse.

c) En posant $^tQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cancel{0}1 & 0 \end{pmatrix}$, le calcul de l'inverse de ^tQ par la méthode du pivot de Gauss donne

$$P = (^tQ)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & \cancel{1}1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est donc $\boxed{\left(\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

4. a)

$$\begin{aligned} q(x,y,z,t) &= x^2 - 2x(y+z) + y^2 + z^2 + 2yz + 4yt \\ &= (x-(y+z))^2 - (y+z)^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 4yt \\ &= (x-y-z)^2 - y^2 - 2yz - z^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 4yt \\ &= (x-y-z)^2 + 4yt \\ &= (x-y-z)^2 + (y+t)^2 - (y-t)^2 \end{aligned}$$

Cela donne $\boxed{q = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2}$ où
$\varphi_1 = [1\ -1\ -1\ 0]$
$\varphi_2 = [0\ 1\ 0\ 1]$
$\varphi_3 = [0\ 1\ 0\ -1]$

et signature$(q) = (2,1)$

b) $\text{rang}(q) = 2+1 = 3$, ce qui est conforme à 2d)

$N(q) = \text{Ker}\,\varphi_1 \cap \text{Ker}\,\varphi_2 \cap \text{Ker}\,\varphi_3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in N(q) \iff \begin{cases} x-y-z=0 \\ y+t=0 \\ y-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y-z=0 \\ y=0 \\ t=0 \end{cases} \iff \begin{matrix} x=z \\ y=0 \\ t=0 \end{matrix}$$

d'où $\boxed{N(q) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

c) On note que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont les formes linéaires de l'énoncé. Pour obtenir une base q-orthogonale, on complète $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ en la base $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ de E^*. La base préduale, qui a été calculée en 3c), $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ est une base q-orthogonale et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

par exemple pour $n=2$ $\quad E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.a Si $A = (a_{ij})$, alors $\boxed{A = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} E_{ij}}$

Par exemple, pour $n=2$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cette écriture est unique. Donc $(E_{ij}, 1 \le i,j \le n)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sa dimension est donc n^2.

b La règle de multiplication des matrices donne

$E_{ij} E_{kl} = 0$ si $j \ne k$ $\quad$ et $\quad E_{ij} E_{jl} = E_{il}$

on a clairement ${}^tE_{ij} = E_{ji}$ $\quad$ (la transposition échange les lignes et les colonnes.

2 a) On note que $q(A) = f(A, A)$

où $f(A,B) = \text{Trace}({}^tA B)$.

Or f est une forme bilinéaire ; par exemple

$f(A, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \text{Trace}({}^tA(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2))$

$= \text{Trace}(\lambda_1 {}^tAB_1 + \lambda_2 {}^tAB_2)$

$= \lambda_1 \text{Trace}({}^tAB_1) + \lambda_2 \text{Trace}({}^tAB_2)$

car la trace est linéaire

$= \lambda_1 f(A, B_1) + \lambda_2 f(A, B_2)$

on montre de même la linéarité en A (la transposition est une application linéaire).

De plus, f est symétrique :

$f(B,A) = \text{Trace}({}^tBA) = \text{Trace}({}^t({}^tBA)) = \text{Trace}({}^tAB) = f(A,B)$

où on a utilisé : $\text{Trace}({}^tC) = \text{Trace}(C)$ et ${}^t(CD) = {}^tD\,{}^tC$.

Ceci montre que q est une forme quadratique

b) Notre base $\mathcal{B} = (E_{ij},\ (i,j) \in \{1,..,n\}\times\{1,..,n\})$ est indexée par un couple d'entiers (i,j) plutôt qu'un seul entier. Les coefficients de la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ sont

$f(E_{ij}, E_{kl}) = \text{Trace}({}^tE_{ij}E_{kl}) = \text{Trace}(E_{ji}E_{kl})$

Or $E_{ji}E_{kl} = 0$ si $i \neq k$; alors $f(E_{ij}, E_{kl}) = 0$

et si $i=k$ $E_{ji}E_{il} = E_{jl}$: la trace est nulle si $j \neq l$ et égale à 1 si $j = l$. En résumé

$$\boxed{f(E_{ij}, E_{kl}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \neq (k,l) \\ 1 & \text{si } (i,j) = (k,l) \end{cases}}$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.

3. On sait que si q admet une base orthonormale sa signature est $(\dim \mathcal{E}, 0) = (n^2, 0)$ et que q est une $\boxed{\text{forme quadratique définie positive}}$. En particulier, elle est définie et par conséquent non dégénérée.

Exercice 3

1. La question demandée exige de montrer que

* u est linéaire :

$$u(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' = X(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2')$$
$$= \lambda_1 X P_1' + \lambda_2 X P_2'$$
$$= \lambda_1 u(P_1) + \lambda_2 u(P_2)$$

où on a utilisé la linéarité de la dérivation

* $u(E) \subset E$: si $\deg P \leq 2$, $\deg P' \leq 1$ et $\deg(XP') = \deg X + \deg P' \leq 2$.

La linéarité de φ ne présente pas de difficulté : la dérivation est linéaire et l'évolution en 0 est linéaire.

2. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle ; c'est donc un hyperplan, en fait un plan car E est de dimension 3.
Calculons-le explicitement :

Si $P = aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$

$P' = 2aX + b$

$P'' = 2a$ $\qquad \varphi(P) = P''(0) = 2a$

Donc $\varphi(P) = 0$ ssi $a = 0$ ssi $\deg P \leq 1$

$\boxed{H = \mathbb{R}_1[X]} \subset \mathbb{R}_2[X]$ $\qquad$ $\dim H = 2$

3. L'argument vu plus haut dit que $u(P)$ a le même degré que P. Donc $u(H) \subset H$

4. a) D'après le cours, si φ est une forme linéaire non nulle $\operatorname{Ker}\varphi$ est stable par u si et seulement si φ est vecteur propre de ${}^t u$.

b) Calculons explicitement ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$. On évalue cette forme linéaire sur $P \in E$

$$\begin{aligned} {}^t u(\varphi)(P) &= (\varphi \circ u)(P) \\ &= \varphi(u(P)) \\ &= \varphi(XP') \\ &= (XP')''(0) \end{aligned}$$

On calcule d'abord

$$(XP')' = XP'' + P'$$

puis

$$\begin{aligned} (XP')'' &= (XP'')' + (P')' \\ &= XP^{(3)} + P'' + P'' \end{aligned}$$

Comme $\deg P \leq 2$, $P^{(3)} = 0$. On obtient

$$(XP')'' = 2P''$$

$${}^t u(\varphi)(P) = 2P''(0) = 2\varphi(P)$$

D'où $\boxed{{}^t u(\varphi) = 2\varphi}$

φ est vecteur propre de ${}^t u$ associé à la valeur propre 2.