Université d'Orléans

Mathématiques

L2MT06

Corrigé de l'examen partiel du 10 Mars 2017

Question de cours

1) Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de l'espace vectoriel de dimension finie E. Alors les fonctions coordonnées $e_i^*(\vec{x}) = x_i$ où $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ forment une base $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ de E^* appelée base duale de E.
C'est l'unique base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de E^* telle que $\varphi_i(\vec{e_j}) = \delta_{ij}$ pour tous i, j.

2) Soit $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de E^*. Alors il existe une unique base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E telle que $\mathcal{B}'$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.
Cette base $\mathcal{B}$ est appelée base préduale de la base $\mathcal{B}'$.

3) La base duale de la base canonique $\left(\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ de K^n est la base $(\varphi_1 = [1\,0 \ldots 0], \ldots, \varphi_n = [0 \ldots 0\,1])$ de $(K^n)^*$.
La base $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ de K^n est donc la base préduale de la base $([1\,0 \ldots 0], \ldots, [0 \ldots 0\,1])$ de $(K^n)^*$.

Exercice 1

1)
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

2) a) $\vec{x} \in D^\perp \iff {}^t(A\vec{v}_0)\,\vec{x} = 0$
avec $\vec{v}_0 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $A\vec{v}_0 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\\-2\end{bmatrix}$. Avec $\vec{x} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}$, l'équation devient
$$[2\;0\;0\;-2]\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} = 2x - 2t = 0$$

Donc $D^\perp$ est le noyau de la forme linéaire $[2\;0\;0\;-2]$. C'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$: $\dim D^\perp = 4 - 1 = 3$

b) Il suffit de trouver une famille libre de trois vecteurs qui vérifient $x = t$, par exemple $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$.

c) $\vec{x} \in D^{\perp\perp} \iff \begin{cases} {}^t(A\vec{e_1})\,\vec{x} = 0 \\ {}^t(A\vec{e_2})\,\vec{x} = 0 \\ {}^t(A\vec{e_3})\,\vec{x} = 0 \end{cases}$

On a $A\vec{e_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $A\vec{e_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A\vec{e_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. D'où les équations

$$\left[\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\ -1\ \tfrac{1}{2}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - z + \frac{1}{2}t = 0$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ -1\right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x - t = 0$$

on n'écrit pas la troisième équation qui est équivalente à la seconde.
Comme les formes linéaires $\varphi_1 = [\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -1\ \frac{1}{2}]$ et $\varphi_2 = [\frac{1}{2}\ 0\ 0\ -1]$ forment une famille libre

$$\dim D^{\perp\perp} = \dim \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi_2 = \dim E - \dim \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) = 4 - 2 = 2$$

d) Si q était non dégénérée, on aurait d'après le cours que $D = D^{\perp\perp}$.
Or $D \neq D^{\perp\perp}$ car $\dim D = 1$ et $\dim D^{\perp\perp} = 2$. Donc q est dégénérée.

3 a) On applique la réduction de Gauss pour écrire q comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
Comme q ne contient pas de carrés, on traite le couple (x, y) :

$$\begin{aligned} q(x,y,z,t) &= x(y + 2z + t) + \text{termes sans } x \\ &= (x - 2t)y + \text{termes sans } y \\ &= (x-2t)(y+2z+t) + \text{termes sans } x \text{ ni } y \text{. Après calcul} \\ &= (x-2t)(y+2z+t) + 2t^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[(x - 2t + y + 2z + t)^2 - (x - 2t - y - 2z - t)^2\right] + 2t^2 \\ &= \frac{1}{4}(x + y + 2z - t)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 2z - 3t)^2 + 2t^2 \end{aligned}$$

Donc $q = \frac{1}{4}\varphi_1^2 - \frac{1}{4}\varphi_2^2 + 2\varphi_3^2$ avec $\varphi_1 = [1\ 1\ 2\ -1]$
$\varphi_2 = [1\ -1\ -2\ -3]$
$\varphi_3 = [0\ 0\ 0\ 1]$

Par définition de la signature
signature$(q) = (2, 1)$

b) $\operatorname{rang}(q) = 2+1 = 3$, donc $\dim N(q) = 4-3 = 1$

On sait que $N(q) = \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi_2 \cap \operatorname{Ker}\varphi_3$.

Par la méthode du pivot de Gauss, le système

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

se réduit à

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ce qui donne $t=0$, $y-2z$, $x=-y-2z=0$

Donc $N(q) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

c) On complète $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ en une base de E^* en choisissant $\varphi_4 = [0\ 0\ 1\ 0]$. Pour calculer la base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ on inverse la matrice

$${}^tQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \quad \text{Cela donne } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La base préduale est constituée des colonnes de P :

$$\left(\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{B}$$

On a alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & & & 0 \\ & -\frac{1}{2} & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

1) Soit f l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ donnée par la deuxième formule de polarisation :

$$f(P,Q) = \frac{1}{4}\left[q(P+Q) - q(P-Q)\right]$$

. Le calcul donne

$$f(P,Q) = \frac{1}{2}\left[P(0)Q(1) + Q(0)P(1)\right]$$

C'est bien une forme bilinéaire symétrique. Donc q est une forme quadratique et f est sa forme polaire.

2) Si $P = a + bX + cX^2$, $P(0) = a$ et $P(1) = a+b+c$

D'où

$$q(P) = a(a+b+c) = a^2 + ab + ac$$

3) $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. a) Par définition

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(2 - 3X + X^2)$$

$$L_1 = \frac{X(X-2)}{(1-0)(1-2)} = 2X - X^2$$

$$L_2 = \frac{X(X-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}(-X + X^2)$$

Par construction $L_i(j) = \delta_{ij}$

b) Supposons $\lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$. En évaluant en $j \in \{0,1,2\}$, on obtient $\lambda_0 L_0(j) + \lambda_1 L_1(j) + \lambda_2 L_2(j) = 0$

soit

$$\lambda_j = 0$$

Donc (L_0, L_1, L_2) est une famille libre de E et par suite une base car $\dim E = 3$.

c) Si $P = y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2$, alors $P(0) = y_0$ et $P(1) = y_1$

Donc $q(P) = y_0 y_1$

d) $Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) La réduction de Gauss est particulièrement facile sur cette expression de q :

$$q(P) = \frac{1}{4}\left[(y_0+y_1)^2 - (y_0-y_1)^2\right]$$

Donc signature$(q) = (1,1)$ et rang$(q) = 1+1 = 2$

Exercice 3

1. D'après le cours,

$\dim F = \dim \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}\varphi_i = \dim E - \dim \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = n - d$

2. Si $\psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, $\psi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_p \varphi_p$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$

Si $\vec{x} \in F$, alors $\varphi_i(\vec{x}) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$.

Donc $\psi(\vec{x}) = \lambda_1 \varphi_1(\vec{x}) + \dots + \lambda_p \varphi_p(\vec{x}) = 0$: $\vec{x} \in \operatorname{Ker}\psi$

on a montré $F \subset \operatorname{Ker}\psi$

3. D'après la même formule qu'à la question 1

$\dim \operatorname{Vect}(\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_p) = \dim E - \dim \operatorname{Ker}\psi \cap \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}\varphi_i$

Or, si $\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}\varphi_i \subset \operatorname{Ker}\psi$, $\operatorname{Ker}\psi \cap \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}\varphi_i = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}\varphi_i = F$

Donc $\dim \operatorname{Vect}(\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_p) = n - \dim F = d = \dim \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$

Comme $\operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \subset \operatorname{Vect}(\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$, cela entraîne l'égalité

$\operatorname{Vect}(\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_p) = \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$

Par conséquent $\psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$

4. Par définition $u(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \varphi_p(\vec{x}) \end{bmatrix}$

a) u est linéaire parce que ses applications coordonnées $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ le sont

b) $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u \iff \varphi_i(\vec{x}) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$ $\iff \vec{x} \in \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i = F$

c) Par définition, pour tout $[\lambda_1, \dots, \lambda_p] \in (K^p)^*$ et pour tout $\vec{x} \in E$

$$ {}^t u[\lambda_1, \dots, \lambda_p](\vec{x}) = [\lambda_1, \dots, \lambda_p] \circ u(\vec{x}) = [\lambda_1, \dots, \lambda_p] \begin{bmatrix} \varphi_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \varphi_p(\vec{x}) \end{bmatrix} $$
$$ = \lambda_1 \varphi_1(\vec{x}) + \dots + \lambda_p \varphi_p(\vec{x}) $$

Donc

$$ {}^t u[\lambda_1, \dots, \lambda_p] = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_p \varphi_p $$

d) $\psi \in \operatorname{Im}({}^t u) \iff \exists\, [\lambda_1, \dots, \lambda_p] \in (K^p)^* : \psi = {}^t u[\lambda_1 \dots \lambda_p]$
$\iff \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K : \psi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_p \varphi_p$
$\iff \psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$

Or, on a vu en 2 et 3 que

$$ \psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \iff F \subset \operatorname{Ker} \psi $$

Cette dernière condition signifie que pour tout $\vec{x} \in F$, $\psi(\vec{x}) = 0$

De plus on a vu en b) que $F = \operatorname{Ker} u$.