Université d'Orléans
Mathématiques
L4MT06

Corrigé de l'examen partiel
du 15 mars 2013

Question de cours

Théorème de Sylvester : Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et q une forme quadratique sur E. Il existe des entiers s et t et une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ orthogonale pour q tels que pour $1 \leq i \leq s$, $q(e_i)=1$, pour $s < i \leq s+t$, $q(e_i)=-1$ et pour $s+t < i \leq n$, $q(e_i)=0$
(ou de manière équivalente $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{s},\underbrace{-1,\dots,-1}_{t},0,\dots 0)$)

De plus, le couple (s,t) ne dépend pas de la base choisie et $s+t=\mathrm{rang}(q)$.

Exercice 1

1. $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\det A = 4 \neq 0 \Rightarrow q$ non dégénérée
$N(q)=\{0\}$

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D^{\perp} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x \ y \ z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\iff y+z=0$

$D^{\perp}$ est le plan vectoriel $\mathrm{Ker}\,\varphi$ où $\varphi(x,y,z)=y+z$

Il contient D donc $D\cap D^{\perp}=D$

$\dim(D)+\dim(D^{\perp}) = 1+2=3$

Cependant, ~~[illegible]~~ $E \neq D \oplus D^{\perp}$
$(D\cap D^{\perp}=D$ et $D+D^{\perp}=D^{\perp})$

4. Il n'y a pas de carrés.

Choisissons le couple (y,z)

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= 2y\,(x+2z) + 2zx \\ &= 2z\,(2y+x) + 2xy \\ &= (2z+x)(2y+x) - x^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[(2z+x+2y+x)^2 - (2z+x-2y-x)^2\right] - x^2 \\ &= \frac{1}{4}(2x+2y+2z)^2 - \frac{1}{4}(-2y+2z)^2 - x^2 \\ &= (x+y+z)^2 - (y-z)^2 - x^2 \\ &= \varphi_1(x,y,z)^2 - \varphi_2(x,y,z)^2 - \varphi_3(x,y,z)^2 \end{aligned}$$

où $\varphi_1 = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*$, $\varphi_2 = \varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*$, $\varphi_3 = \varepsilon_1^*$

(cela fait partie de la méthode!)

on sait que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre. c'est donc une base de E^*.

signature$(q) = (1,2)$

rang$(q) = 1+2 = 3$ (on le savait déjà : q est non dégénérée)

5. On calcule la base préduale de la base $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

La matrice de passage $\mathcal{B}_0^* \to (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage $\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base préduale est

$$P = ({}^tQ)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où $e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'après le cours, (e_1, e_2, e_3) est une base q-orthogonale et

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{diag}(1,-1,-1)$

Ex 2

1 a) On montre que $\varphi_k : E \to \mathbb{R}$ est linéaire :

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E$

$$\begin{aligned}\varphi_k(\lambda P+\mu Q) &= (\lambda P+\mu Q)^{(k)}(\alpha)\\ &= (\lambda P^{(k)}+\mu Q^{(k)})(\alpha) \qquad \text{(linéarité de la dérivation)}\\ &= \lambda P^{(k)}(\alpha) + \mu Q^{(k)}(\alpha)\\ &= \lambda \varphi_k(P) + \mu \varphi_k(Q)\end{aligned}$$

Donc $\varphi_k \in E^*$

b) Si $P \in \operatorname{Ker}\varphi_0 \cap \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker}\varphi_n$, on a

$\varphi_0(P) = \varphi_1(P) = \dots = \varphi_n(P) = 0$ cad

$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(n)}(\alpha) = 0$

D'après le rappel, on peut écrire $P = (X-\alpha)^{n+1} Q$

Si Q était non nul, on aurait

$$\deg P = (n+1) + \deg Q \geqslant n+1$$

ce qui est impossible car $\deg P \leqslant n$.

Donc $Q = 0$ et $P = (X-\alpha)^{n+1} Q = 0$

c) On sait d'après le cours que

$\dim \operatorname{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker}\varphi_0 \cap \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker}\varphi_n)$. Ici

$$= n+1 - 0$$
$$= n+1$$

Comme $\operatorname{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un sev de dim $n+1$ de E^* qui est de dimension $n+1$, on a l'égalité $\operatorname{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = E^*$.

La famille $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est génératrice. Comme elle a $n+1 = \dim E^*$ éléments, c'est une base de E^*

2 a) On a la formule générale

$$\begin{aligned}\psi_k &= \psi_k(e_0)\, e_0^* + \psi_k(e_1)\, e_1^* + \dots + \psi_k(e_n)\, e_n^*\\ &= \psi_k(1)\, e_0^* + \psi_k(X)\, e_1^* + \dots + \psi_k(X^n)\, e_n^*\end{aligned}$$

Il s'agit donc de calculer $\psi_k(X^\ell)$ pour $\begin{matrix}k \\ \ell\end{matrix} \in \{0, 1, \dots, n\}$

Posons $DP = P'$, $D^2P = P''$, $\dots$, $D^kP = P^{(k)}$

On a $DX^\ell = \ell X^{\ell-1}$

$D^2X^\ell = (\ell-1)\ell X^{\ell-2}$

$\vdots$

$D^kX^\ell = (\ell-k+1)\cdots(\ell-1)\ell X^{\ell-k}$ pour $k \leq \ell$

$= 0$ pour $k > \ell$

D'où $\varphi_k(X^\ell) = (D^kX^\ell)(0) = 0$ si $\ell \neq k$

$= k!$ si $\ell = k$

Les composantes de φ_k dans la base $\mathcal{B}_0^*$ sont donc $(0,\dots,0,\underset{k}{k!},0,\dots,0)$

La matrice du changement de base est

$$Q = \mathrm{diag}(0!, 1!, 2!, \dots, n!) \qquad (\text{par convention, } 0! = 1)$$

b) Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base préduale de $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$

La matrice du changement de base $\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}$ est

$$P = ({}^tQ)^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots, \frac{1}{n!}\right)$$

La base préduale est donc

$$\left(e_0 = 1,\ e_1 = \frac{X}{1!}, \dots, e_k = \frac{1}{k!}X^k, \dots, e_n = \frac{1}{n!}X^n\right)$$

c) La formule générale pour $P \in E$

$P = \varphi_0(P)e_0 + \varphi_1(P)e_1 + \dots + \varphi_n(P)e_n$ devient

$$P = P(0)\,1 + P'(0)\frac{X}{1!} + \dots + P^{(n)}(0)\frac{X^n}{n!}$$

3 a) $\tau(\lambda P + \mu Q)(X) = (\lambda P + \mu Q)(X - \alpha)$

$= \lambda P(X-\alpha) + \mu Q(X-\alpha)$

$= \lambda \tau(P) + \mu \tau(Q)$

Donc τ est linéaire. On vérifie que pour

$\tau_\alpha(P)(X) = P(X-\alpha)$ et $\tau_\beta(P)(X) = P(X-\beta)$, on a

$\tau_\alpha \circ \tau_\beta = \tau_\beta \circ \tau_\alpha = \tau_{\alpha+\beta}$;

$$\tau_\alpha \circ \tau_\beta(P)(X) = \tau_\beta(P)(X-\alpha) = P((X-\alpha)-\beta) = P(X-(\alpha+\beta))$$
$$= \tau_{\alpha+\beta}(P)(X)$$

Comme $\tau_0 = Id_E$, τ_α est inversible avec $\tau_\alpha^{-1} = \tau_{-\alpha}$.
τ est donc un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même. Comme $\deg(\tau(P)) = \deg(P)$, $\tau(E) = E$.
τ est donc un isomorphisme linéaire de E sur lui-même.

b) Par définition, pour $P \in E$

$$<{}^t\tau(\varphi_k), P> = <\varphi_k, \tau(P)> = \tau(P)^{(k)}(\alpha)$$

(dérivée d'une fonction composée)

Or $\tau(P)' = \tau(P')$ et par récurrence $\tau(P)^{(k)} = \tau(P^{(k)})$

Donc $\tau(P)^{(k)}(X) = P^{(k)}(X-\alpha)$

et $\tau(P)^{(k)}(\alpha) = P^{(k)}(0) = <\psi_k, P>$

Donc ${}^t\tau(\varphi_k) = \psi_k$

c) Par définition de la base préduale, on a

$<\psi_i, e_j> = \delta_{ij}$ pour tous $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Donc

$<{}^t\tau(\varphi_i), e_j> = \delta_{ij}$

$<\varphi_i, \tau(e_j)> = \delta_{ij}$

Ceci montre que $(\tau(e_0), \tau(e_1), \dots, \tau(e_n))$ est la base préduale de $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$. La formule générale

$$P = \varphi_0(P)\tau(e_0) + \varphi_1(P)\tau(e_1) + \dots + \varphi_n(P)\tau(e_n) \text{ donne}$$

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)\frac{X-\alpha}{1!} + \dots + P^{(n)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^n}{n!}$$