Math

Algèbre III

Corrigé Examen Partiel du 18 Mars 2011

Question de cours

(o) H est un hyperplan de E

(i) Il existe D droite vectorielle telle que $E = H \oplus D$

(ii) Il existe φ forme linéaire non nulle telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$

(iii) $\dim H = n-1$

Exercice 1

1 a) linéarité de l'intégrale

b) linéarité de l'évaluation en a

c) $$\varphi_a = \varphi_a(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0^* + \varphi_a(\varepsilon_1)\,\varepsilon_1^* + \varphi_a(\varepsilon_2)\,\varepsilon_2^*$$
$$= 1\,\varepsilon_0^* + a\,\varepsilon_1^* + a^2\,\varepsilon_2^*$$

d) $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ est libre car $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Comme $\dim E^* = 3$, c'est une base de E^*.

2 a) On a
$$(\lambda P + \mu Q)(-x) = \lambda P(-x) + \mu Q(-x) \quad \text{d'où}$$
$$S(\lambda P + \mu Q) = \lambda S(P) + \mu S(Q)$$
$$S^2P(x) = SP(-x) = P(x) \quad \text{d'où } S^2P = P \text{ et } S^2 = Id_E$$

b) $${}^tS\varphi_a(P) = \varphi_a(S(P)) = P(-a) = \varphi_{-a}(P)$$

d'où ${}^tS\varphi_a = \varphi_{-a} \Rightarrow \begin{array}{l} {}^tS\varphi_1 = \varphi_{-1} \\ {}^tS\varphi_0 = \varphi_0 \end{array}$

$${}^tS\psi(P) = \psi(S(P)) = \int_{-1}^{1} P(-t)\,dt = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \psi(P)$$

c) ${}^tS(\varphi_1) = \varphi_{-1} \Rightarrow {}^tS(\varphi_{-1}) = {}^tS\,{}^tS(\varphi_1) = {}^t(S^2)(\varphi_1) = \varphi_1$

d) L'existence et l'unicité de (α, β, γ) résulte du fait que $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ est une base de E^*

e) $\psi = \alpha\varphi_{-1} + \beta\varphi_0 + \gamma\varphi_1$

Par linéarité de ${}^tS$:

$${}^tS\psi = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_0 + \gamma\varphi_{-1}$$

Par unicité de la décomposition

$$\alpha = \gamma$$

f) $${}^tQ = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^tQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

g) $\vec{e}_0 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$ $\qquad \alpha = \psi(\vec{e}_0) = \frac{1}{3}$

$\vec{e}_1 = 1 - X^2$ $\qquad \Rightarrow \beta = \psi(\vec{e}_1) = \frac{4}{3}$

$\vec{e}_2 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$ $\qquad \gamma = \psi(\vec{e}_2) = \frac{1}{3}$

D'où $$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \frac{1}{3}P(-1) + \frac{4}{3}P(0) + \frac{1}{3}P(1)$$

Exercice 2

1. a) On écrit la base duale canonique

$\varepsilon_1^* = [1\ 0\ 0\ 0]$ $\quad \varepsilon_2^* = [0\ 1\ 0\ 0]$ $\quad \varepsilon_3^* = [0\ 0\ 1\ 0]$ $\quad \varepsilon_4^* = [0\ 0\ 0\ 1]$

$\varphi_1 = [1\ -1\ 1\ -2]$

$\varphi_2 = [1\ -1\ -2\ 1]$

$\varphi_3 = [2\ -2\ -1\ -1]$

b) ~~on calcule le déterminant~~

On remarque que $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$: $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ n'est pas libre

2. $F = \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi_2 \cap \operatorname{Ker}\varphi_3$

a) F sev : intersection de sev

b) On remarque que (φ_1, φ_2) est libre

$\dim \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \dim \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) = 2$

$\dim F = 4 - \dim \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 4 - 2 = 2$

On cherche une famille libre de deux vecteurs de F :

On doit avoir
$$\begin{cases} x - y + z - 2t = 0 \\ \quad\quad -z + t = 0 \end{cases} \iff \Big\{$$

On peut prendre $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad q(X) = {}^tX A X$

b) ~~Xxxx~~

$X \perp F \iff \begin{cases} X \perp \vec{e}_1 \\ X \perp \vec{e}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} {}^tX A\vec{e}_1 = 0 \\ {}^tX A\vec{e}_2 = 0 \end{cases}$

Or $A\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $A\vec{e}_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Cela donne

$X \perp F \iff x - y + z + 2t = 0$ où $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$

$F^\perp = \mathrm{Ker}\,\varphi$ (où $\varphi = [1 \; -1 \; 1 \; 2]$) est un hyperplan

$\dim F^\perp = 4 - 1 = 3$

~~Contrairement à la dimension~~

c) Si q était non dégénérée, on aurait d'après le cours

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E = 4$$

Or on a $\dim F + \dim F^\perp = 2 + 3 = 5$

Donc q est dégénérée.

d) On applique l'algorithme de Gauss à q :

$$q(x,y,z,t) = x^2 - 2x(y-t) + y^2 + t^2 - 2yt + 4zt$$
$$= (x-(y-t))^2 - (y-t)^2 + y^2 + t^2 - 2yt + 4zt$$
$$= (x-y+t)^2 \cancel{- y^2} \cancel{+ 2yt} \cancel{- t^2} \cancel{+ y^2} \cancel{+ t^2} \cancel{- 2yt} + 4zt$$

$$4zt = (z+t)^2 - (z-t)^2$$

$$q(x,y,z,t) = (x-y+t)^2 + (z+t)^2 - (z-t)^2$$

$$q = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2 \quad \text{où}$$

$$\varphi_1 = [1 \ -1 \ 1 \ 0]$$
$$\varphi_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1] \quad \Rightarrow \quad \text{signature}(q) = (2,1)$$
$$\varphi_3 = [0 \ 0 \ 1 \ -1] \qquad \text{rang}(q) = 2+1 = 3$$

e) $\text{rang}(q) = 3 \Rightarrow \dim N(q) = 1$. Il suffit de trouver un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} A$. On a déjà calculé :

si $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, alors $A\vec{e}_1 = \vec{0}$

Donc $N(q) = \mathbb{R}\vec{e}_1$.