Université d'Orléans

Mathématiques

L4 MT06

Examen du 7 mai 2013

-corrigé

Questions de cours

1) Soit $(f_1, f_2, \dots)$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel $(E, <,>)$. Alors il existe une famille orthogonale de vecteurs non nuls $(e_1, e_2, \dots)$ telle que pour tout $k = 1, 2, \dots$

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_k)$$

On construit cette famille par récurrence :

$$e_1 = f_1$$

$$e_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{<f_{k+1}, e_i>}{<e_i, e_i>} e_i .$$

2) On dit qu'un endomorphisme $u \in L(E)$ est symétrique si $u^* = u$, c.à.d $<u(x), y> = <x, u(y)>$ pour tous $x, y \in E$.

Si u est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans cette base soit diagonale.

Exercice 1

1 a) $\varphi_1 = (1, -1, 1, -2)$

$\varphi_2 = (1, -1, -2, 1)$

$\varphi_3 = (2, -2, -1, -1)$

b) non car $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$

2 a) $F = \mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_2 \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_3$ est une intersection d'hyperplans. C'est donc un ~~s~~ espace vectoriel de E.

b) $\dim F = \dim E - \dim \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

Or $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ a dimension 2, car la famille (φ_1, φ_2) est libre.

Donc $\dim F = 4 - 2 = 2$.

Une famille libre $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de F sera une base de F. On peut prendre $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3 a)

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) On note $F^\perp$ l'orthogonal de F pour q et on écrit $\vec{x} \perp \vec{y}$ ssi $f(\vec{x}, \vec{y})$ où f est la forme polaire de q

Comme $F = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{x} \in F^\perp \iff \vec{x} \perp \vec{e}_i$ pour $i = 1, 2$

Si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $\vec{x} \perp \vec{e}_i \iff (x\ y\ z\ t)\, A \vec{e}_i = 0$

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Il ne reste qu'une équation non triviale

$$2x - 2y + 2z + 4t = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$x - y + z + 2t = 0$$

C'est l'équation d'un hyperplan. Donc $\dim F^\perp = 4 - 1 = 3$

c) On a $\dim F + \dim F^\perp = 2 + 3 = 5$

Si q était non dégénérée, d'après le cours on aurait

$\dim F + \dim F^\perp = \dim E = 4$

Donc q est dégénérée.

d) On applique la méthode de réduction de Gauss pour écrire q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes :

$$
\begin{aligned}
q(x,y,z,t) &= x^2 + 2x(-y+t) + y^2+t^2-2yt + 4zt \\
&= (x + (-y+t))^2 - (-y+t)^2 + y^2 + t^2 - 2yt + 4zt \\
&= (x-y+t)^2 + 4zt \\
&= (x-y+t)^2 + \left[(z+t)^2 - (z-t)^2\right] \\
&= \varphi_1(x,y,z,t)^2 + \varphi_2(x,y,z,t)^2 - \varphi_3(x,y,z,t)^2
\end{aligned}
$$

où $\varphi_1(x,y,z,t) = x-y+t$, $\varphi_2(x,y,z,t) = z+t$, $\varphi_3(x,y,z,t) = z-t$

La signature de q est donc $\mathrm{sign}(q) = (2,1)$.

e) On sait alors que $\mathrm{rang}(q) = 2+1 = 3$.

On sait que $N(q) = \ker A$ où A est la matrice de q dans $\mathcal{B}_0$:

Si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ $\quad A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{cases} x-y+t = 0 \\ 2t = 0 \\ x-y+2z+t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

D'où $N(q) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 2

1. Une condition nécessaire est que la norme des colonnes soit égale à 1. Cela donne $(1-a)^2 = 1$ soit $a(a-2) = 0$ soit $a \in \{0,2\}$

On vérifie alors que les matrices

$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sont orthogonales : leurs vecteurs-colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

2 a) Etudions f_0 de matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Comme A_0 est symétrique, f_0 est une symétrie orthogonale.

Déterminons son sous-espace invariant

$$E_1 = \{ \vec{x} \in E \ : \ f_0(\vec{x}) = \vec{x} \}$$

Si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, on a $\begin{cases} z = x \\ y = y \\ x = z \end{cases}$

Donc E_1 est le plan $\mathrm{Vect}(\vec{e_2}, \vec{e_1} + \vec{e_3})$ où on a écrit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

En conclusion, f_0 est la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathrm{Vect}(\vec{e_2}, \vec{e_1} + \vec{e_3})$.

b) Etudions f_2 de matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice n'est pas symétrique. De plus

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

D'après la classification des endomorphismes orthogonaux en dimension 3, f_2 est une rotation. Il reste à déterminer son axe de rotation et son angle de rotation.

Comme $A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'axe de rotation est $\mathrm{Vect}(\vec{e_2})$

On oriente cette droite par $\vec{e_2}$. Son orthogonal est $\mathrm{Vect}(\vec{e_3}, \vec{e_1})$. L'orientation directe de ce plan est donnée par la base $(\vec{e_3}, \vec{e_1})$ car $(\vec{e_3}, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base directe de E.

La théorie générale nous dit que l'angle de rotation θ

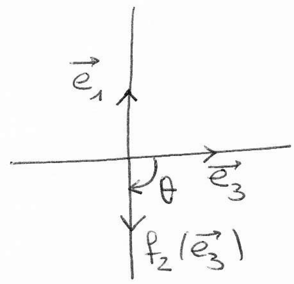
satisfait $2\cos\theta + 1 = \text{Trace}(A_2) = 1$, d'où $\cos\theta = 0$

et $\theta = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

On pourrait utiliser la méthode générale pour trouver le signe de $\sin\theta$. Plus simplement, on calcule

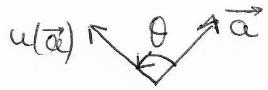
$f_2(\vec{e_3}) = -\vec{e_1}$

pour conclure que $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Exercice 3

1. La rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ satisfait $u(\vec{a}) \perp \vec{a}$ pour tout $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$



2 a) $f : E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \langle x, u(y) \rangle$ est une forme bilinéaire car le produit scalaire est bilinéaire et u est linéaire. Il en est de même de g définie par $g(x,y) = \langle u(x), y \rangle$ et de $\varphi = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g$ (une combinaison linéaire de formes bilinéaires est bilinéaire)

Comme $g(x,y) = \langle u(x), y \rangle = \langle y, u(x) \rangle = f(y,x)$,

$\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$. Donc φ est une forme bilinéaire symétrique

b) Par définition, la forme quadratique associée est

$q(x) = \varphi(x,x) = \frac{1}{2}(\langle x, u(x) \rangle + \langle u(x), x \rangle)$

D'après notre hypothèse, $\langle u(x), x \rangle = 0$ pour tout x

donc $q(x) = 0$ pour tout x

c) D'après une des identités de polarisation,

par exemple $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]$,

on a aussi $\varphi(x,y) = 0$ pour tous $x, y \in E$

cela dit $\langle x, u(y) \rangle = -\langle u(x), y \rangle \quad \forall x, y \in E$

c.a.d $\langle u^*(x), y \rangle = \langle -u(x), y \rangle \quad \forall x, y \in E$

c.a.d $u^* = -u$

3. Si $n = \dim E$, pour tout endomorphisme $u \in L(E)$,

on a $\det(-u) = (-1)^n \det u$.

Comme $u^* = -u$

$$\det(u^*) = (-1)^n \det(u)$$

On sait aussi que $\det(u^*) = \det(u)$ (Une matrice et sa matrice transposée ont même déterminant)

et que $\det(u) \neq 0$ car u est inversible.

Donc $(-1)^n = 1$ et n est pair

4. $u^2 = u \circ u \underset{2c)}{=} -u^* \circ u \underset{u \text{ est orthogonale}}{=} -Id_E$