Université d'Orléans
Mathématiques
Algèbre III

Examen du 10/05/11

Corrigé succinct

Questions de cours :

1) Théorème de Sylvester : Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique.

i) Il existe un couple d'entiers $(r,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, une famille libre $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r+s})$ de E^* et des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+s}$ avec $\alpha_i > 0$ si $i \leq r$ et $\alpha_i < 0$ si $i > r$ tels que

$$q = \sum_{i=1}^{r+s} \alpha_i \varphi_i^2$$

ii) Le couple (r,s) ne dépend que de q. Ce couple s'appelle la signature de q.

2) Endomorphismes symétriques

i) On dit qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel euclidien E est symétrique si $\forall x, y \in E \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.
De manière équivalente, u est symétrique ssi $u = u^*$.

ii) Un endomorphisme symétrique possède une base orthonormale de vecteurs propres. De manière équivalente, u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Exercice 1

a)
$$\varphi_1 = [1 \ -1 \ 0] = \varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*$$
$$\varphi_2 = [0 \ 1 \ 1] = \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*$$
$$\varphi_3 = [1 \ 0 \ 1] = \varepsilon_1^* + \varepsilon_3^*$$

b) On remarque que $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$. Donc la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ n'est pas libre. Par contre (φ_1, φ_2) est libre. Cette famille est donc de rang 2, c.a.d $\dim \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 2$

c) $\dim F = \dim E - \dim \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ (d'après le cours)

$= 3 - 2 = 1$

d) Si $\varphi \in E^*$, φ^2 est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire $f(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$. Donc $q = \varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_3^2$, qui est une combinaison linéaire de formes quadratiques, est une forme quadratique.

e) On applique la méthode de Gauss pour décomposer q

$$q(x,y,z) = (x-y)^2 - (y+z)^2 + (x+z)^2 \qquad \text{on développe :}$$

$$= 2x^2 - 2xy - 2yz + 2xz$$

$$= 2(x^2 - xy + xz) - 2yz$$

$$= 2\left(x^2 + x(z-y)\right) - 2yz$$

$$= 2\left[\left(x + \tfrac{1}{2}(z-y)\right)^2 - \tfrac{1}{4}(z-y)^2\right] - 2yz$$

$$= 2\left(x + \tfrac{1}{2}(z-y)\right)^2 - \tfrac{1}{2}(z-y)^2 - 2yz$$

$$= 2\left(x + \tfrac{1}{2}(z-y)\right)^2 - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{2}y^2 - zy$$

$$= 2\left(x + \tfrac{1}{2}(z-y)\right)^2 - \tfrac{1}{2}(z^2 + y^2 + 2zy)$$

$$= 2\left(x + \tfrac{1}{2}(z-y)\right)^2 - \tfrac{1}{2}(z+y)^2$$

$$= 2\,\psi_1^2(x,y,z) - \tfrac{1}{2}\,\psi_2^2(x,y,z)$$

avec $\psi_1(x,y,z) = x + \frac{1}{2}(z-y)$

$\psi_2(x,y,z) = z + y$

On en déduit

signature $(q) = (1,1)$

rang $(q) = 1 + 1 = 2$

$\operatorname{Ker} q = F = \operatorname{Ker}\psi_1 \cap \operatorname{Ker}\psi_2$ on résout

$$\begin{cases} x + \tfrac{1}{2}(z-y) = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{Cela donne} \quad F = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

a) On rappelle que l'endomorphisme f_a est orthogonal (c.a.d $f_a^* \circ f_a = Id_E$) ssi sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale (c.a.d $A^*A = I$).

Une condition nécessaire est que les vecteurs-colonnes aient norme 1.

Appliquée à la $2^{\text{ème}}$ colonne de A, cela donne

$$(4+1+4)\,a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

On vérifie que pour $a=1$ et $a=-1$, on a bien $A^*A = I$

b) On utilise la classification des endomorphismes orthogonaux en dimension 3 vue en cours.

Pour $\underline{a=1}$, $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\det A = 1$, $\text{Trace}\, A = -1$

on déduit que f_1 est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \text{Ker}(f_1 - Id_E)$

$AX = X \Rightarrow X = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Donc $D = \mathbb{R}\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$

Pour $\underline{a=-1}$, $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\det A = -1$, $\text{Trace}\, A = -\frac{1}{3}$

on déduit que f_{-1} est une rotation-symétrie d'angle θ tel que

$2\cos\theta - 1 = -\frac{1}{3}$, soit $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

L'axe de cette rotation-symétrie est la droite $D = \text{Ker}(f_{-1} + Id_E)$

$AX = -X \Rightarrow X = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Donc $D = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

On pose $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et on choisit $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ de sorte que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit une base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Le plan $P = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

est stable par f_{-1} et la restriction de f_{-1} à P est une

rotation. Comme $\det(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1), \vec{e}_3) > 0$, $\sin\theta > 0$

et $\theta \in [0, \pi]$ modulo 2π. Donc $\theta = \mathrm{Arcos}(\frac{1}{3})$.

<u>Exercice 3</u>

a) L'endomorphisme $u^* u$ est symétrique :

$$(u^* u)^* = u^* (u^*)^* = u^* u$$

Il existe donc une base orthonormale dont les éléments sont des vecteurs propres de $u^* u$.

b) Soit $\vec{x}$ un vecteur propre de $u^* u$ de valeur propre λ :

$$u^* u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

On calcule le produit scalaire avec $\vec{x}$:

$$< u^* u(\vec{x}), \vec{x} > = < \lambda \vec{x}, \vec{x} >$$

On obtient

$$\| u(\vec{x}) \|^2 = \lambda \| \vec{x} \|^2$$

On déduit $\lambda \geqslant 0$.

c) On a $\vec{x} = \sum_1^n x_i \vec{e}_i$, $\|\vec{x}\|^2 = \sum_1^n x_i^2 = x_1^2 + \sum_2^n x_i^2$

$$\| u(\vec{x}) \|^2 = < u^* u(\vec{x}), \vec{x} > = < \sum_1^n x_i \lambda_i \vec{e}_i, \sum_1^n x_j \vec{e}_j >$$

$$= \sum_1^n \lambda_i x_i^2 = \lambda_1 x_1^2 + \sum_2^n \lambda_i x_i^2$$

$$\| u(\vec{x}) \|^2 - \lambda_1 \| \vec{x} \|^2 = \sum_2^n (\lambda_i - \lambda_1) x_i^2 \leqslant 0$$

d) $\| u(\vec{x}) \|^2 \leqslant \lambda_1 \| \vec{x} \|^2$

e) On a l'égalité si

$$(\lambda_i - \lambda_1) x_i^2 = 0 \quad \text{pour } i = 2, \dots, n$$

Soit r le plus grand entier tel que $\lambda_i = \lambda_1$: on a

$$\lambda_i = \lambda_1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, r$$

$$\lambda_i < \lambda_1 \quad \text{pour } i > r$$

on doit avoir $x_i = 0$ pour $i > r$, donc

$$\vec{x} \in \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r) = \mathrm{Ker}(u^*u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) = E_{\lambda_1}(u^*u)$$

f) Soit $\vec{x} \in E$ avec $\|\vec{x}\| = 1$

D'après a) $\|u(\vec{x})\|^2 \leq \lambda_1$

Donc $\sup\limits_{\substack{\vec{x} \in E \\ \|\vec{x}\| = 1}} \|u(\vec{x})\|^2 \leq \lambda_1$

D'autre part, si $\vec{x} \in E_{\lambda_1}(u^*u)$, on a l'égalité

$$\|u(\vec{x})\|^2 = \lambda_1$$

Donc la borne supérieure est atteinte et on a

$$\max\{\|u(\vec{x})\|^2 : \vec{x} \in E, \|\vec{x}\| = 1\} = \lambda_1$$

Exercice 4

a) On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la famille $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ dans l'espace préhilbertien réel E :

on pose $e_0 = \varepsilon_0 = 1$

Notons que $\langle e_0, e_0 \rangle = \int_0^1 1.1 \, dt = 1$

On pose

$$e_1 = \varepsilon_1 - \frac{\langle \varepsilon_1, e_0 \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} e_0 = \varepsilon_1 - \langle \varepsilon_1, e_0 \rangle e_0$$

$$\langle \varepsilon_1, e_0 \rangle = \int_0^1 t.1 \, dt = \frac{1}{2}$$

$$e_1(t) = t - \frac{1}{2}$$

Notons que $\langle e_1, e_1 \rangle = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}$

b) Comme $P_F(g) \in F$, $P_F(g) = a_0 e_0 + a_1 e_1$

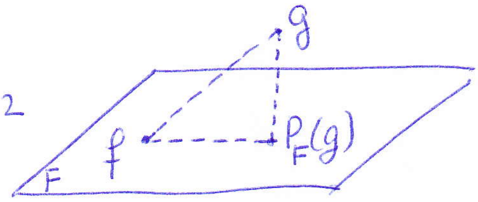
On calcule a_0 et a_1 en faisant le produit scalaire avec e_0 et e_1 :

$$a_0 \langle e_0, e_0 \rangle = \langle P_F(g), e_0 \rangle = \langle g, P_F(e_0) \rangle = \langle g, e_0 \rangle$$
$$a_1 \langle e_1, e_1 \rangle = \langle P_F(g), e_1 \rangle = \langle g, P_F(e_1) \rangle = \langle g, e_1 \rangle$$

D'où $a_0 = \dfrac{\langle g, e_0 \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle}$, $a_1 = \dfrac{\langle g, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$

c) D'après Pythagore :

$$\|g - f\|^2 = \|g - P_F(g)\|^2 + \|P_F(g) - f\|^2$$



$$d(g,F)^2 = \inf_{f \in F} \|g - f\|^2 = \|g - P_F(g)\|^2 = \|g\|^2 - \|P_F(g)\|^2$$

d) $\|g\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t-2)^2}\, dt = -\frac{1}{t-2}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$

$P_F(g) = a_0 e_0 + a_1 e_1$ avec

$$\langle g, e_0 \rangle = \int_0^1 g(t)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{t-2}\, dt = \log|t-2|\Big|_0^1 = -\log 2$$

$$\langle g, e_1 \rangle = \int_0^1 \frac{t}{t-2}\, dt = \int_0^1 \left(\frac{t-2}{t-2} + \frac{2}{t-2} \right) dt$$
$$= 1 - 2\log 2$$

$$a_0 = \langle g, e_0 \rangle = -\log 2 \quad ; \quad a_1 = \frac{\langle g, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} = 6(2 - 3\log 2)$$

$$\|P_F(g)\|^2 = a_0^2 \langle e_0, e_0 \rangle + a_1^2 \langle e_1, e_1 \rangle = 12 - 36\log 2 + 28(\log 2)^2$$

$$d(g,F)^2 = \frac{3}{2} - 4\left(3 - 9\log 2 + 7(\log 2)^2\right)$$