Département de Mathématiques
Université d'Orléans

L4 MT 02 : Algèbre III
2007-2008

Corrigé de l'épreuve du 22 Mai 2008

Exercice I :

1. Désignons par C_1, C_2 et C_3 les vecteurs colonnes de A. L'endomorphisme f_a est orthogonal si et seulement si (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormale de E. Or $\langle C_1, C_2 \rangle = \frac{1}{9}(2+2-4) = 0$, $\langle C_1, C_3 \rangle = \frac{1}{9}(-2a+4a-2a) = 0$ et $\langle C_2, C_3 \rangle = \frac{1}{9}(-4a+2a+2a) = 0$. Ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux. De plus $\|C_1\|^2 = \frac{1}{9}(1+4+4) = 1$, $\|C_2\|^2 = \frac{1}{9}(4+1+4) = 1$ et $\|C_3\|^2 = \frac{1}{9}(4a^2+4a^2+a^2) = a^2$. Par conséquent $f_a \in O(E)$ si et seulement si $a \in \{-1, 1\}$.

2. Etude de f_{-1} : C'est un endomorphisme symétrique ; sa trace vaut 1. Donc f_{-1} est une symétrie orthogonale par rapport plan, espace propre associé à la valeur propre 1 et qui a pour équation : $x - y - z = 0$.

   Etude de f_1 : C'est un endomorphisme non symétrique ; sa trace vaut $\frac{1}{3}$. Déterminons l'ensemble des vecteurs invariants. On obtient le système :
   $\begin{cases} -2x+2y-2z &= 0 \\ 2x-2y+2z &= 0 \\ 2x-2y-4z &= 0 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ x-y-2z &= 0 \end{cases}$ ou encore équivalent à $\begin{cases} x &= y \\ z &= 0 \end{cases}$.

   Donc f_1 est une rotation d'axe dirigé par le vecteur u de coordonnées $(1,1,0)$. Son angle θ est tel que $1 + 2\cos\theta = \mathrm{Tr}(f_1) = \frac{1}{3}$. De plus $\det(e_1, f_1(e_1), u) = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} < 0$.

   Par conséquent f_1 est la rotation d'axe dirigé par u et d'angle $\theta = -\mathrm{Arccos}(-\frac{1}{3})$.

Exercice II :

1. (a) Si $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$ alors $(\alpha+\beta+\gamma, \gamma, \beta+\gamma, -\gamma) = (0,0,0,0)$.
   On en déduit $\gamma = \beta = \alpha = 0$ et la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

   (b) En appliquant le principe d'orthogonalisation de Schmidt à la famille libre (u_1, u_2, u_3), on obtient une famille orthogonale (e_1, e_2, e_3) telle que $\mathrm{Vect}(\{e_1, e_2, e_3\}) = \mathrm{Vect}(\{u_1, u_2, u_3\})$, c'est à dire une base orthogonale de F. La famille (e_1, e_2, e_3) est donnée par les formules suivantes :
   $e_1 = u_1 = (1,0,0,0)$; $e_2 = u_2 - \frac{\langle e_1, u_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 = u_2 - e_1 = (0,0,1,0)$;
   $e_3 = u_3 - \frac{\langle e_1, u_3 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle e_2, u_3 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2 = u_3 - e_1 - e_2 = (0,1,0,-1)$.

   (c) Désignons par $p(u)$ la projection orthogonale de u sur F. La base (e_1, e_2, e_3) étant orthogonale avec $\|e_1\|^2 = \|e_2\|^2 = 1$ et $\|e_3\|^2 = 2$ on a :
   $p(u) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle e_i, u \rangle}{\|e_i\|^2} e_i = 1\,e_1 + 0\,e_2 + \frac{1}{2} e_3 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$.

2. (a) On a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $F^{\perp} = (\mathrm{Vect}(\{e_1, e_2, e_3\}))^{\perp} = \{e_1, e_2, e_3\}^{\perp}$. Or $v = (x, y, z, t) \in e_1{}^{\perp} \Leftrightarrow (x, y, z, t) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

c'est à dire $(x, y, z, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ soit encore $x + z + t = 0$.

De même on obtient $v \in e_2{}^{\perp} \Leftrightarrow x + 2y + z + 3t = 0$ et $v \in e_3{}^{\perp} \Leftrightarrow -x - z - t = 0$. Donc

$$\begin{aligned} v \in F^{\perp} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad x + z + t & = \quad 0 \\ x + 2y + z + 3t & = \quad 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + z + t & = \quad 0 \\ \quad y + t & = \quad 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $F^{\perp} = \{(x, -t, -x - t, t) \; ; \; (x, t) \in \mathbb{R}^2\}$, $\big((1, 0, -1, 0), (0, -1, -1, 1)\big)$ est une base de $F^{\perp}$ et $\dim(F^{\perp}) = 2$.

(c) La forme quadratique q est dégénérée car on a : $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = 5 \neq 4 = \dim(E)$.

3. (a) Appliquons la méthode de Gauss pour décomposer q en combinaison linéaire de carrés d'une famille libre de formes linéaires : $\forall (x, y, z, t) \in E$

$$\begin{aligned} q(x, y, z, t) \quad & = \quad (x + z + t)^2 - (z + t)^2 + z^2 + t^2 + 4yz + 6zt \\ & = \quad (x + z + t)^2 + +4yz + 4zt \\ & = \quad (x + z + t)^2 + (y + z + t)^2 - (y - z + t)^2 . \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{B}_0^* = (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \varepsilon_4^*)$ la base duale de $\mathcal{B}_0$ et posons $\varphi_1 = \varepsilon_1^* + \varepsilon_3^* + \varepsilon_4^*$, $\varphi_2 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* + \varepsilon_4^*$ et $\varphi_3 = \varepsilon_2^* - \varepsilon_3^* + \varepsilon_4^*$. Nous obtenons alors $q = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2$.
D'où la signature de q est $(2, 1)$, son rang 3 et son noyau l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) tels que : $\begin{cases} x + z + t & = \; 0 \\ y + z + t & = \; 0 \\ y - z + t & = \; 0 \end{cases}$. D'où $N(q) = \mathrm{Vect}(\{(1, 1, 0, -1)\})$.

(b) Complétons $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ pour obtenir une base de E^*, par exemple par ε_4^*.

$Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0^*}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon_4^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est bien inversible car de déterminant 2.

Soit $\mathcal{B}$ la base de E dont $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon_4^*)$ est la base duale. Alors $\mathcal{B}$ est q-orthogonale. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ alors ${}^tP^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0^*$ à $\mathcal{B}^*$. Donc $Q = {}^tP^{-1}$, soit $P = {}^tQ^{-1}$. Tous calculs faits on obtient :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & -0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } {}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ base q-orthogonale en posant :
$v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = \big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\big)$, $v_3 = \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\big)$ et $v_4 = \big(-1, -1, 0, 1\big)$.

Exercice III : .

1. voir polycopié Corollaire 4.1.3.
2. La nécessité de la condition est évidente.
Supposons que $\langle s(x), x \rangle = 0$. Puisque $s \in S(\mathrm{E})$, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de s, associés respectivement à la valeur propre λ_i. Comme de plus $s \in S^+(\mathrm{E})$, on a donc $\lambda_i \geqslant 0$, pour tout $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$.
Dans $\mathcal{B}$, le vecteur x se décompose en $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et par suite $s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$. $\quad (*)$
D'où $0 = \langle s(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i$. Or, pour tout $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$, $x_i^2 \lambda_i \geqslant 0$, donc $x_i^2 \lambda_i = 0$. Si $x_i = 0$ alors $x_i \lambda_i = 0$, sinon $\lambda_i = 0$ et on a encore $x_i \lambda_i = 0$. On en déduit que pour tout $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$, $x_i \lambda_i = 0$; il résulte de $(*)$ que $s(x) = 0$, c'est à dire $x \in \mathrm{Ker}\,(s)$.
3. (a) Si $f \in \boldsymbol{O}(E)$ alors $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|$, donc $f \in \mathcal{B}(E)$. On a $\boldsymbol{O}(E) \subset \mathcal{B}(E)$.
   (b) $f = 2\,\mathrm{Id}_E$ appartient à $S(\mathrm{E})$ et pour tout vecteur x non nul on a $\|f(x)\| = 2\|x\| > \|x\|$. On a donc $S(\mathrm{E}) \not\subset \mathcal{B}(E)$.
4. (a) On a $(f^* \circ f)^* = f^* \circ f^{**} = f^* \circ f$, donc $f^* \circ f$ appartient à $S(\mathrm{E})$.
   De plus, pour tout $x \in E$ on a $\langle f^* \circ f(x), x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle \geqslant 0$; donc $f^* \circ f \in S^+(\mathrm{E})$.
   (b) D'après la question (a), $(\mathrm{Id}_E - f^* \circ f)^* = \mathrm{Id}_E - f^* \circ f$ d'où $\mathrm{Id}_E - f^* \circ f$ appartient à $S(\mathrm{E})$.
   (c) D'après la question précédente $\mathrm{Id}_E - f^* \circ f$ appartient à $S(\mathrm{E})$. De plus pour tout $x \in E$, on a $\langle (\mathrm{Id}_E - f^* \circ f)(x), x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle f^* \circ f(x), x \rangle = \|x\|^2 - \|f(x)\|^2$. $(**)$
   Donc $f \in \mathcal{B}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Id}_E - f^* \circ f \in S^+(\mathrm{E})$.
5. (a) Pour tout $x \in E$, on a $\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x), f^*(x) \rangle = \langle f \circ f^*(x), x \rangle \leqslant \|f(f^*(x))\|\,\|x\|$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\|f^*(x)\|^2 \leqslant \|f^*(x)\|\,\|x\|$ car $f \in \mathcal{B}(E)$.
   (b) Soit $x \in E$. Si $f^*(x) = 0$ on a bien $\|f^*(x)\| \leqslant \|x\|$, sinon en divisant les deux membres de l'inégalité obtenue à la question précédente par $\|f^*(x)\|$, nombre réel strictement positif, on obtient également $\|f^*(x)\| \leqslant \|x\|$. Cela prouve que f^* appartient à $\mathcal{B}(E)$.
6. Soient $E_f = \{x \in E \,;\, \|f(x)\| = \|x\|\}$ et $E_{f^*} = \{x \in E \,;\, \|f^*(x)\| = \|x\|\}$.
   (a) D'après la question 4(c) $\mathrm{Id}_E - f^* \circ f$ appartient à $S^+(\mathrm{E})$ et d'après 2, $x \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - f^* \circ f)$ si et seulement si $\langle (\mathrm{Id}_E - f^* \circ f)(x), x \rangle = 0$ c'est à dire $\|x\|^2 = \|f(x)\|^2$ d'après $(**)$. D'où $E_f = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - f^* \circ f)$.
   (b) D'après la question 5(b), f^* appartient à $\mathcal{B}(E)$ et on peut appliquer le résultat de la question précédente à f^*. D'où $E_{f^*} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - f \circ f^*)$.
   (c) Puisque ce sont des noyaux d'applications linéaires, E_f et E_{f^*} sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (d) Si $x \in E_f$ alors $f^*(f(x)) = x$. D'où $\|f^*(f(x))\| = \|x\| = \|f(x)\|$ et $f(x) \in E_{f^*}$.
   Réciproquement si $y \in E_{f^*}$ alors $y = f(f^*(y))$ et $\|f^*(y)\| = \|y\|$, donc ${}^*(y)$ appartient à E_f et $y \in f(E_f)$.
   Il en résulte que $f(E_f) = E_{f^*}$. En appliquant ce résultat à f^* on obtient $f^*(E_{f^*}) = E_f$.
   (e) D'après le théorème du rang, une application linéaire n'accroît pas la dimension ; on en déduit donc que $\dim(E_{f^*}) = \dim(f(E_f)) \leqslant \dim(E_f)$ et $\dim(E_f) = \dim(f^*(E_{f^*})) \leqslant \dim(E_{f^*})$.
   D'où E_f et E_{f^*} ont même dimension.