

Examen
Première Session

durée : 2 heures

Documents et appareils électroniques interdits

Questions de cours :

- 1) Énoncer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.
- 2) Donner la définition d'un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien. Quel est le résultat essentiel concernant la diagonalisation des endomorphismes symétriques ?

Exercice 1

Soient φ_1, φ_2 et φ_3 les formes linéaires sur $E = \mathbf{R}^3$ définies par

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) &= x - z \\ \varphi_2(x, y, z) &= y + z \\ \varphi_3(x, y, z) &= x + y \end{cases}$$

- a) Déterminer les coordonnées de chaque φ_i dans la base $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*)$ duale de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de \mathbf{R}^3 .
- b) La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ?
- c) Déterminer la dimension de $F = \text{Ker}(\varphi_1) \cap \text{Ker}(\varphi_2) \cap \text{Ker}(\varphi_3)$.
- d) On pose $q = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2$. Montrer que q est une forme quadratique sur E .
- e) Déterminer la signature, le rang et le noyau de q .

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe \mathcal{B} . Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans \mathcal{B} est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2a & 2a & -a \end{pmatrix}$$

- a) Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.

b) Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de f_a et en donner une description géométrique complète (par exemple, si vous avez trouvé que f_a est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, donner l'équation de ce plan).

Exercice 3

Soit $E = C([0, 1])$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles. On munit E du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ pour $f, g \in E$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. On note f_0, f_1 les fonctions définies par $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$ pour $t \in [0, 1]$. On note F le sous-espace vectoriel engendré par f_0 et f_1 .

- Déterminer la dimension de F .
- Déterminer une base orthogonale (e_0, e_1) de F .
- Exprimer à l'aide du produit scalaire les coordonnées (a_0, a_1) dans la base (e_0, e_1) de la projection orthogonale $P_F(g)$ sur F d'un élément $g \in E$ quelconque.
- Etant donné $g \in E$, on note $d(g, F) = \inf_{f \in F} \|g - f\|$ la distance de g à F . Calculer $d(g, F)^2$ en fonction de $\|g\|^2$ et de $\|P_F(g)\|^2$.
- Calculer explicitement $P_F(g)$ et $d(g, F)$ pour la fonction g définie par

$$g(t) = \sin \pi t, \quad t \in [0, 1].$$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E . On considère l'endomorphisme u^*u (par définition, c'est le composé $u^* \circ u$).

- Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E telle que \vec{e}_i est un vecteur propre de u^*u pour tout $i = 1, \dots, n$.
- Montrer que toutes les valeurs propres de u^*u sont positives ou nulles.
- Pour $i = 1, \dots, n$, on note λ_i la valeur propre de u^*u associée au vecteur propre \vec{e}_i . On suppose $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Soit $\vec{x} \in E$ de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} . Calculer $\|\vec{x}\|^2$ et $\|u(\vec{x})\|^2$ en fonction des x_i et des λ_i .
- Calculer $\|u(\vec{x})\|^2 - \lambda_1 \|\vec{x}\|^2$. En déduire que $\|u(\vec{x})\|^2 \leq \lambda_1 \|\vec{x}\|^2$.
- Montrer que $\lambda_1 = \max\{\|u(\vec{x})\|^2 : \vec{x} \in E \text{ de norme } \|\vec{x}\| = 1\}$.