Question de cours

1) Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel et $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..)$ une famille libre. On définit par récurrence

$$\vec{e}_1 = \vec{f}_1$$

$$\vec{e}_{k+1} = \vec{f}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{<\vec{f}_{k+1}, \vec{e}_i>}{<\vec{e}_i, \vec{e}_i>} \vec{e}_i \qquad k \geq 1$$

Alors

a) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls

b) $Vect(\vec{e}_1, .., \vec{e}_k) = Vect(\vec{f}_1, .., \vec{f}_k)$ pour tout $k \geq 1$

2/ On dit que $u \in L(E)$ est symétrique si $u^* = u$ c.a.d $<u(x), y> = <x, u(y)>$ $\forall x, y \in E$

Un endomorphisme sym est diagonalisable dans une base ON de vecteurs propres c.a.d :

$\exists \mathcal{B}$ base ON telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.

Exercice 1

a) $\varphi_1 = [1\ 0\ -1]$

$\varphi_2 = [0\ 1\ 1]$

$\varphi_3 = [1\ 1\ 0]$

b) non $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 \Rightarrow Vect(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = Vect(\varphi_1, \varphi_2)$

c) $\dim F = 3 - \dim Vect(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 3 - 2 = 1$

d) φ^2 est une forme quadratique de forme polaire $f(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$

une comb lin de formes quadratiques est une forme quadratique

e) $q = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - (\varphi_1+\varphi_2)^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_2^2$

$= -2\varphi_1\varphi_2 = -\frac{1}{2}\left[(\varphi_1+\varphi_2)^2 - (\varphi_1-\varphi_2)^2\right]$

$\boxed{q = -\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)^2 + \frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)^2} = -\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y-2z)^2$

(φ_1, φ_2) libre $\Rightarrow (\varphi_1+\varphi_2, \varphi_1-\varphi_2)$ libre

$\Rightarrow$ signature$(q) = (1,1)$, rang$(q) = 2$,

$N(q) = Ker\varphi_1 \cap Ker\varphi_2 \cap Ker\varphi_3$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad y = -z$, $x = z$ $\quad \Rightarrow Vect \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$q = (x-z)^2 + (y+z)^2 - (x+y)^2$

$= 2z^2 - 2xz + 2yz - 2xy$

$= 2\left[z^2 + z(y-x)\right] - 2xy$

$= 2\left[z + \frac{1}{2}(y-x)\right]^2 - \frac{1}{2}(y-x)^2 - 2xy$

$= 2\left(z + \frac{1}{2}(y-x)\right)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2)$

$\boxed{q = \frac{1}{2}(2z+y-x)^2 - \frac{1}{2}(x+y)^2}$

Exercice 2

a) On rappelle que l'endomorphisme f_a est orthogonal (càd $f_a^* \circ f_a = Id_E$) ssi sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale (càd ${}^tA A = I_n$). Une condition nécessaire est que les vecteurs-colonnes de A aient norme 1. Appliqué à la 1ère colonne, cela donne

$$1^2 + 2^2 + (-2a)^2 = 9$$

D'où $a^2 = 1$ et $a = \pm 1$.

On vérifie que pour $a=1$ et $a=-1$, on a bien ${}^tA A = I_3$ (les vecteurs-colonnes forment une base ON de $\mathbb{R}^3$)

b) On utilise la classification des endomorphismes orthogonaux en dimension 3 vue en cours.

Pour $a=1$, $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ n'est pas symétrique. On calcule $\det A = 1$. On en déduit que f_1 est une rotation d'angle $\theta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. L'axe de cette rotation est la droite $D = \mathrm{Ker}(f_1 - Id)$. Elle est dirigée par X non nul tel que

$$AX = X \iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 3x \\ 2x + y - 2z = 3y \\ -2x + 2y - z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On choisit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On sait que $2\cos\theta + 1 = \mathrm{Trace}(A) = \frac{1}{3}$, d'où $\cos\theta = -\frac{1}{3}$.

On choisit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Il ne plus qu'à déterminer son signe. θ a le même signe que $\sin\theta$. On sait que $\sin\theta$ a le même signe que $\det(\vec{a}, f_1(\vec{a}), X)$ où $\vec{a} \notin D$. On choisit $\vec{a} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{a}, f_1(\vec{a}), X) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

Donc f_1 est la rotation d'angle $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{3}\right)$ autour de l'axe D dirigé par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Pour $a=-1$</u>, $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ est symétrique.

Comme $\operatorname{Trace}(A) = 1$, f_{-1} est une symétrie orthogonale par rapport à un plan (c.a.d une réflexion). Ce plan est $\operatorname{Ker}(f_{-1} - Id)$.

$$AX = X \iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 3x \\ 2x + y - 2z = 3y \\ 2x - 2y + z = 3z \end{cases} \iff x - y - z = 0$$

Donc f_{-1} est la réflexion par rapport au plan d'équation cartésienne $x - y - z = 0$.

Exercice 3

a) On montre que la famille (f_0, f_1) est libre :

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0 \Rightarrow \forall t \in [0,1],\ \lambda_0 + \lambda_1 t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 0 = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = 0$$

Donc $\dim F = \dim \mathrm{Vect}(f_0, f_1) = 2$

b) On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la famille libre (f_0, f_1) :

$$e_0 = f_0$$

$$e_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, e_0 \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} e_0$$

On a $\langle e_0, e_0 \rangle = \int_0^1 1.1\, dt = 1$ et $\langle f_1, e_0 \rangle = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$

D'où $e_0(t) = 1$ et $e_1(t) = t - \frac{1}{2}$ pour tout $t \in [0,1]$.

On sait que (e_0, e_1) est une base orthogonale de F.

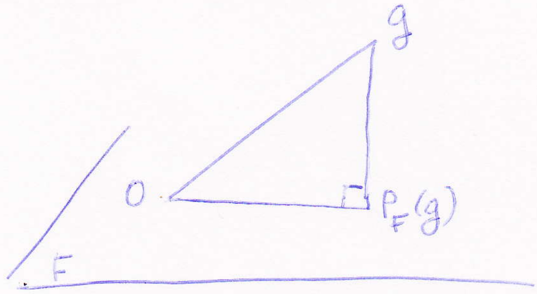
c) $$P_F(g) = \frac{\langle g, e_0 \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} e_0 + \frac{\langle g, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1$$

Explicitement,

$$a_0 = \int_0^1 g(t)\, dt \qquad a_1 = 12 \int_0^1 g(t)\left(t - \frac{1}{2}\right) dt$$

d) On sait que la borne inférieure de $\{\|g - f\|,\ f \in F\}$ est atteinte pour $f = P_F(g)$. Donc

$$d(g, F)^2 = \|g - P_F(g)\|^2.$$



D'après le théorème de Pythagore

$$d(g, F)^2 = \|g\|^2 - \|P_F(g)\|^2$$

e) Pour $g = \sin \pi t$, $a_0 = \int_0^1 (\sin \pi t)\, dt = \frac{2}{\pi}$

$$a_1 = 12 \int_0^1 (\sin \pi t)\left(t - \frac{1}{2}\right) dt$$

$$= 12 \left[-\frac{\cos \pi t}{\pi} \times \left(t - \frac{1}{2}\right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos \pi t}{\pi} \, dt \right]$$

$$= 12 \left[\frac{1}{2\pi} (1 - 1) + \frac{1}{\pi^2} \sin \pi t \Big|_0^1 \right] = 0$$

$$P_F(g) = \frac{2}{\pi} e_0$$

$$\|g\|^2 = \int_0^1 \sin^2 \pi t \, dt = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi t}{2} \, dt = \frac{1}{2}$$

$$\|P_F(g)\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 dt = \frac{4}{\pi^2}$$

$$d(g, F)^2 = \|g\|^2 - \|P_F(g)\|^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2}$$

$$d(g, F) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi^2 - 8}{2}}$$

Exercice 4

a) L'endomorphisme u^*u est symétique :

$$(u^*u)^* = u^*(u^*)^* = u^*u$$

D'après le cours, il admet une base orthonormale de vecteurs propres.

b) Soit λ une valeur propre associée au vecteur propre $\vec{x} \neq \vec{0}$:

$$(u^*u)(\vec{x}) = \lambda \vec{x}.$$

on prend le produit scalaire avec $\vec{x}$:

$$< (u^*u)(\vec{x}), \vec{x} > = < \lambda\vec{x}, \vec{x} >.$$

on obtient

$$< u(\vec{x}), u(\vec{x}) > = \lambda < \vec{x}, \vec{x} >$$

$$\|u(\vec{x})\|^2 = \lambda \|\vec{x}\|^2$$

Comme $\|\vec{x}\|^2 > 0$, $\lambda \geqslant 0$.

c) Soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$. Alors $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

on a aussi $u^*u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \vec{e}_i$, donc

$$\|u(\vec{x})\|^2 = < u(\vec{x}), u(\vec{x}) > = < u^*u(\vec{x}), \vec{x} >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

d) $\|u(\vec{x})\|^2 - \lambda_1 \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1) x_i^2 \leq 0$

Donc $\|u(\vec{x})\|^2 \leq \lambda_1 \|\vec{x}\|^2$.

e) D'après la question précédente, λ_1 est un majorant de $\{ \|u(\vec{x})\|^2 : \vec{x} \in E, \|\vec{x}\| = 1 \}$

Or ce majorant est atteint pour $\vec{x} = \vec{e}_1$. Donc

$$\lambda_1 = \max \{ \|u(\vec{x})\|^2 : \vec{x} \in E, \|\vec{x}\| = 1 \}$$