Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MA06

9 Avril 2018

Feuille d'exercices n^0 5

Exercice 1

Soit $E = \mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$ pour tous $P, Q \in E$.

1) Soient $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ la base canonique de E et $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la base orthogonale de E obtenue à partir de (X^n) par l'orthogonalisation de Schmidt (les P_n sont appelés polynômes de Legendre).

a) Soient $P, Q \in E$. Montrer que si P est une fonction paire et si Q est une fonction impaire, alors P et Q sont orthogonaux.

b) Déterminer P_0, P_1, P_2 et P_3.

c) Déterminer les racines de P_3.

2) Soit E_2 l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soient a, b, c trois réels distincts. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$ tel que pour tout $R \in E_2$, on ait :

$$\int_{-1}^{1} R(x)dx = \alpha R(a) + \beta R(b) + \gamma R(c).$$

3) Soit E_5 l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

a) Soit $P \in E$. Montrer qu'il existe $Q \in E$ and $R \in E_2$ tels que $P = P_3 Q + R$.

b) On suppose que $P \in E_5$. Montrer que $Q \in E_2$. Que peut-on dire de $< P_3, Q >$?

c) On suppose que a, b, c sont les racines de P_3. Montrer que pour tout $P \in E_5$ on a

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$$

où (α, β, γ) est comme en 2).

Exercice 2

Déterminer les extrémas locaux des fonctions $f : \Omega \to \mathbf{R}$ suivantes :

a) $\Omega = \mathbf{R}^2$ et $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

b) $\Omega = \mathbf{R}^3$ et $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z$.

c) $\Omega = \mathbf{R}^3$ et $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

Exercice 3

On considère un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal. Déterminer dans les cas suivants la nature et préciser les éléments géométriques de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

a) $x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$.

b) $x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$.

c) $x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$.

d) $x^2 - 2xy + y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 1 = 0$.