

Feuille d'exercices $n^0 4$

Exercice 1

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ symétrique. Montrer que

$$\text{Trace}(M^2 + M + 1) \geq \frac{3n}{4}.$$

Exercice 2

Soit A une matrice symétrique réelle satisfaisant $A^k = \text{Id}$ pour un entier $k \geq 1$. Montrer qu'alors $A^2 = \text{Id}$. Que peut-on dire de plus si k est impair ?

Exercice 3

Soit $E = M_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire défini par : $\langle M, N \rangle = \text{Trace}({}^tMN)$. Pour tout $B \in E$, on désigne par L_B l'opérateur sur E de multiplication à gauche par B : $L_B(M) = BM$ pour tout $M \in E$.

- a) Déterminer l'adjoint de L_B .
- b) En déduire que $L_B \in O(E)$ si et seulement si $B \in O_n(\mathbf{R})$.

Exercice 4

Soient $n \geq 3$ et $A \in M_n(\mathbf{R})$ définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \text{ ou } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Déterminer le rang de A et son noyau.
- b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

Exercice 5

Soit $A \in M_{2n+1}(\mathbf{R})$ définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n + 1 \text{ ou } j = n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer le spectre de A (On pourra déterminer $\text{rang}(A)$ et calculer A^2 .)

Exercice 6

Soient $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ et $A \in M_n(\mathbf{R})$ définie par $a_{ii} = a$ et $a_{ij} = b$ pour $(i, j) \in [1, \dots, n]^2$ et $i \neq j$. Déterminer une base orthogonale qui diagonalise A .

Exercice 7

On considère $E = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique \mathcal{B}_0 . Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de E dont les matrices dans \mathcal{B}_0 sont :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe \mathcal{B} . Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans \mathcal{B} est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -a & -2a & 2a \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.
- Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de f_a .

Exercice 9

On considère $E = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer les matrices dans la base canonique des endomorphismes orthogonaux suivants :

- S symétrie orthogonale par rapport à la droite D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$.
- S' symétrie orthogonale par rapport au plan P d'équation $x + y + z = 0$
- R rotation d'axe D dirigé par \vec{u} et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.