Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MT06

2 Mars 2018

Feuille d'exercices n^0 3

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel. Déterminer parmi les applications de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ suivantes celles qui sont des produits scalaires :
(i) $E = \mathbf{R}^2$, $\quad ((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + 2xy' + 2yx' + 5yy'$;
(ii) $E = \mathbf{R}^2$, $\quad ((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + 2xy' + 2yx' + yy'$;
(iii) $E = \mathbf{R}_2[X]$, $\quad (P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$;
(iv) $E = M_n(\mathbf{R})$, $\quad (M,N) \mapsto Trace(MN)$;
(v) $E = M_n(\mathbf{R})$, $\quad (M,N) \mapsto Trace({}^tMN)$;

Exercice 2

Soient $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire et $x, y \in E$.
a) Calculer $\| \|x\|^2 y \quad - \quad < x, y > x\|^2$.
b) Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les cas d'égalités.

Exercice 3

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a,b]$. Montrer que

$$\Big(\int_a^b f(t)dt\Big)\Big(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\Big) \geq (b-a)^2.$$

Etudier les cas d'égalités.

Exercice 4

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs de somme égale à 1.
a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n^2$.
b) Etudier les cas d'égalités.

Exercice 5

Soient E un espace euclidien et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de E de norme 1. On suppose qu'il existe $x \in E$ de norme 1 tel que $\|\dfrac{x + x_n}{2}\|$ tende vers 1 quand n tend vers l'infini. Montrer que (x_n) tend vers x.

Exercice 6

Dans $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B}$, on considère $\vec{v}_1 = {}^t(1,2,-1,1)$ et $\vec{v}_2 = {}^t(0,3,1,-1)$ et $F = Vect(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Déterminer une base orthogonale et un système d'équations de $F^\perp$.

Exercice 7

Soit E un espace euclidien. Montrer que pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E on a :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 8

Dans $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B}$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

Déterminer la matrice, relativement à $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 9

Soit $E = \mathcal{C}([0,\pi], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$< f, g >= \int_0^\pi f(t)g(t)dt.$$

On considère les fonctions $e_1, e_2, f \in E$ définies par

$$e_1(t) = \sin t, \quad e_2(t) = \cos t, \quad f(t) = t.$$

On pose $F = Vect(e_1, e_2)$.

a) Déterminer la projection orthogonale de f sur F.

b) En déduire la valeur de : $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^\pi (a\sin t + b\cos t - t)^2 dt.$

Exercice 10

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $E = \mathbf{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un et un seul $Q \in E$ tel que pout tout $P \in E$ on ait

$$P'(1) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$