

Feuille d'exercices $n^0 2$

Exercice 1

Soient q_1, q_2, q_3 les formes quadratiques sur \mathbf{R}^3 définies pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ par

(i) $q_1(x, y, z) = x^2 - 2xy + z^2$.

(ii) $q_2(x, y, z) = 2xy + 2yz$.

(iii) $q_3(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2xz$.

Pour chacune de ces formes quadratiques, déterminer sa matrice, son rang, son noyau et préciser si elle est non dégénérée ou définie.

Exercice 2

Soient f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E et q la forme quadratique associée. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E .

a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont orthogonaux ;

(ii) $F \subset G^\perp$ et

(iii) $G \subset F^\perp$.

b) Montrer que $F \subset F^\perp \Leftrightarrow F \subset C(q)$.

c) Soient x et y des vecteurs de E isotropes. Montrer que $x + y$ est isotrope si et seulement si x et y sont orthogonaux.

Exercice 3

Soient f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E et q la forme quadratique associée. Soient $u \in E$ un vecteur non isotrope et D la droite engendrée par u .

a) Montrer que pour tout $v \in E$, le vecteur $v - \frac{f(u,v)}{q(u)}u$ appartient à D^\perp .

b) En déduire que $E = D \oplus D^\perp$.

c) Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $E = F \oplus F^\perp$ si et seulement si $q|_F$ est non dégénérée.

Exercice 4

On considère les applications q_1, q_2 et q_3 de $\mathbf{R}[X]$ dans \mathbf{R} définies, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ par

$$q_1(P) = 2P(1)P'(0); \quad q_2(P) = P(-1)P(0)P(1); \quad q_3(P) = |P(-1)P(1)|.$$

Parmi ces applications, déterminer celles qui sont des formes quadratiques. Dans ce cas, donner la forme polaire associée.

Exercice 5

Soit q la forme quadratique sur \mathbf{R}^4 définie pour tout (x, y, z, t) de \mathbf{R}^4 par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2xz - 2zt.$$

a) Déterminer la matrice de q dans la base canonique $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ de \mathbf{R}^4 . La forme quadratique q est-elle dégénérée ?

b) Déterminer F^\perp , $F \cap F^\perp$ et $\dim(F) + \dim(F^\perp)$ lorsque F est le sous-espace vectoriel suivant :

- (i) $F = D = \text{Vect}(\epsilon_1)$;
- (ii) $F = P = \text{Vect}(\epsilon_3, \epsilon_4)$;
- (iii) $F = Q = \text{Vect}(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_3 - \epsilon_4)$;
- (iv) $F = H$ hyperplan d'équation : $x + y = 0$.

Exercice 6

On considère $E = \mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et les formes linéaires sur E définies par :

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1), \quad \varphi_3(P) = \int_0^1 P(t)dt.$$

- 1) Déterminer les coordonnées de chaque φ_i dans la base $\mathcal{B}^* = (e_0^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ duale de \mathcal{B} .
- 2) La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ?
- 3) Déterminer la dimension de $F = \text{Ker}(\varphi_1) \cap \text{Ker}(\varphi_2) \cap \text{Ker}(\varphi_3)$.
- 4) On pose $q = \varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_3^2$. Montrer que q est une forme quadratique sur E .
- 5) Déterminer la signature de q . Déterminer le rang de q .
- 6) En déduire la dimension du noyau de q . Donner une autre justification de ce résultat.

Exercice 7

Opérer la réduction de Gauss et déterminer noyau, rang, signature et base orthogonale, pour les formes quadratiques suivantes :

- a) $q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 2xy + 4xz$;
- b) $q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz - 6yz$;
- c) $q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = xy + yz$;
- d) $q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)$;
- e) $q : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 4zt$;
- f) $q : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$, $q(x, y, z, t) = xy + 2xz + xt + 2yt + 4zt$.