Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MT06

19 Janvier 2018

Feuille d'exercices n^0 1

Exercice 1

On note $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Déterminer si les familles de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivantes sont des bases. Si oui, déterminer la base duale.

a)$(\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

b)$(\mathbf{f}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{k}, \mathbf{f}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{f}_3 = \mathbf{j} + \mathbf{k})$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur K et $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble d'indices, une base de E.

a) Montrer que si $(\alpha_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments non nuls de K, alors $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_i = \alpha_i \mathbf{e}_i)_{i \in I}$ est une base de E.

b) Quelle relation lie ${\mathbf{e}'_i}^*$ et ${\mathbf{e}_i}^*$?

Exercice 3

Etant donné $A \in M_n(K)$, on note $\mathrm{Trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ sa trace.

a) Montrer que Trace est une forme linéaire sur $M_n(K)$.

b) Montrer que l'application $A \in M_n(K) \mapsto \varphi_A$, où $\varphi_A(M) = \mathrm{Trace}(AM)$, est un isomorphisme linéaire de $M_n(K)$ sur son dual $M_n(K)^*$

Exercice 4

Soit $E = \mathbf{R}_n[K]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $(a_0, \ldots, a_n)$ un $(n+1)-$ uple de scalaires deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)-$ uple $(c_0, \ldots, c_n)$ de scalaires tels que pour tout $P \in E$,

$$\int_0^1 P(x)dx = c_0 P(a_0) + \ldots + c_n P(a_n).$$

Exercice 5

On considère $E = \mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et les formes linéaires sur E définies par :

$$\varphi_1(P) = P(1), \varphi_2(P) = P(-1), \varphi_3(P) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 P(t)dt, \varphi_4(P) = \int_{-1}^1 tP'(t)dt.$$

On pose $F = \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_3) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_4)$.

1) Montrer que $P_0 = X^3 - X$ appartient à F.

2) En déduire que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ n'est pas libre.

3) Déterminer les coordonnées de chaque φ_i dans la base $\mathcal{B}^* = (e_0^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ duale de $\mathcal{B}$.

4) Déterminer la dimension de F, puis une base de F.

Exercice 6

Soient φ_1, φ_2 et φ_3 les formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$ définies par

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) &= & 2x & +4y & +z \\ \varphi_2(x,y,z) &= & -x & +2y & +3z \\ \varphi_3(x,y,z) &= & x & +y & \end{cases}$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbf{R}^3)^*$. Déterminer la base $\mathcal{B}$ dont elle est la base duale.

Exercice 7

Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ définis ci-dessous, puis en donner une base.

a) $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - z = 0\}$;

b) $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - z = x + y - z - t = 0\}$;

c) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - z = x + y - z - t = 3x + 4y - 3z - 2t = 0\}$;

d) $D = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - z = x + y - z - t = x - y + z - t = 0\}$.

Exercice 8

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $k \in \mathbf{N}^*$ et $f \in L(E)$ tels que $f^k = Id_E$.

1) On suppose que $K = \mathbf{C}$. Montrer que f est diagonalisable.

2) On suppose que $K = \mathbf{R}$. Montrer que f est diagonalisable si $k = 1$ ou si $k = 2$ mais n'est pas nécessairement diagonalisable si $k \geq 3$.

Exercice 9

Soit $E = \mathbf{R}[X]$.

1) On définit $D \in L(E)$ par $D(P) = P'$ et $\varphi \in E^*$ par $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)dt$. Calculer ${}^tD(\varphi)$.

2) On définit $u \in L(E)$ par $u(P) = XP'$ et $\psi \in E^*$ par $\psi(P) = P'(0)$. Calculer ${}^tu(\psi)$.

Exercice 10

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère sa base canonique $\mathcal{B} = (\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = X, \epsilon_2 = X^2)$ et la base duale $\mathcal{B}^* = (\epsilon_0^*, \epsilon_1^*, \epsilon_2^*)$.

On note D l'endomorphisme de E qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivée P'.

1) Déterminer la matrice de D relativement à la base $\mathcal{B}$.

2) Déterminer la matrice de ${}^tD$ relativement à la base $\mathcal{B}^*$.

Exercice 11

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda Id_E$ (c'est-à-dire u est une homothétie).

(ii) Toute droite (vectorielle) D de E est stable par u (c'est-à-dire $u(D) \subset D$).

(iii) Tout hyperplan (vectoriel) H de E est stable par u (c'est-à-dire $u(H) \subset H$).

Exercice 12

Dans $E = M_n(\mathbf{R})$, on considère la matrice A dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la ligne n qui valent -1.

1) Décomposer A dans la base canonique (E_{ij}) de $M_n(\mathbf{R})$.

2) Donner la décomposition de $B = {}^tA$ dans cette même base.

3) Déterminer les produits AB et BA.