Feuille 0

Exercice 1 : théorème de la base incomplète et conséquences

A] Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
1) Montrer que si L est une partie libre finie de E et G et une partie finie génératrice de E telles que $L \subset G$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$L \subset \mathcal{B} \subset G$$

2) En déduire que si F est un sous-espace vectoriel de E, il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que

$$E = F \oplus G$$

B] Soit désormais F un espace vectoriel et f une application linéaire de E vers F. On note $Ker(f)$ le noyau de f et $Im(f)$ l'image de f. Montrer que

$$dim(E) = dim\,(Im(f)) + dim\,(Ker(f))$$

C] On note désormais $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
1) Montrer que E n'est pas de dimension finie.
(On pourra par exemple montrer que la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par $g_n(x) = x^n$ est libre).
2) On note $E_p = \{f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ paire}\}$ et $E_i = \{f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ impaire}\}$.
Montrer que

$$E = E_p \oplus E_i$$

Exercice 2

1) Soit $E = \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4,\ \text{tels que } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de E.
2) Soit $F = \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4,\ \text{tels que } x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$.
a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
b) Calculer $dim(E)$, $dim(F)$, $dim(E \cap F)$ et $dim(E + F)$.

Exercice 3 : matrices

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & k \end{pmatrix}$

1) Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et donner en donner une base.
2) Déterminer l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_{\in}(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$; montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ dont on donnera la dimension.
3) Déterminer l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il s''agit d'un espace vectoriel dont on donnera la dimension.

Exercice 4 : matrices

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \exists (a,\ b,\ c) \in \mathbb{C}^3,\ M = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{pmatrix} \right\}$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont on donnera une base $\mathcal{B}$.
2) Soit ϕ l'application de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par

$$\phi \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{a+c} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a+b+c} \end{pmatrix}$$

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2) Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
3) Déterminer l'image et le noyau de ϕ.

Exercice 5 : une équation linéaire

On considère l'équation de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \qquad n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in \mathbb{R}$$

et on note E l'ensemble de ses solutions.

1) Montrer que E est un espace vectoriel réel de dimension 2.

2) Déterminer deux solutions de la forme $u_n = r^n$ où $r \in \mathbb{R}$. Montrer que ces deux solutions sont linéairement indépendantes.

3) Soit (u_n) la suite de Fibonacci:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots, u_n, \ldots)$$

Utilisez les questions précédentes pour déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.