Université d'Orléans 30 Mars 2018
Département de Mathématiques
L4MT06

Pb n^0 2
à rendre avant le 13 Avril 2018

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$ et $u \in L(E)$ non nul tel que pour tout $x \in E$, $u(x)$ est orthogonal à x.

1) Donner un exemple d'un tel u quand $E = \mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

2) En évaluant $< u(x+y), x+y >$ de deux manières, montrer que $u^* = -u$.

3) En déduire que E est la somme directe orthogonale de $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$ et que ces sous-espaces vectoriels sont stables par u.

4) Soit v la restriction de u au sous-espace vectoriel $Im(u)$.

a) Montrer que $v \in L(\mathrm{Im}(u))$ est bijectif.

b) Montrer que $v^* = -v$.

c) En calculant de deux manières le déterminant de v, montrer que le rang r de u est pair.

5) On pose $w = u^2$.

a) Montrer que w est symétrique.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(w) = \mathrm{Ker}(u)$. En déduire que $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(u)$.

c) Montre que w possède une valeur propre λ non nulle.

6) Soit $a \in E$ tel que $w(a) = \lambda a$ et $\|a\| = 1$. On pose $E_1 = \mathrm{Vect}(a, u(a))$ et $\alpha = \|u(a)\|$.

a) Montrer que $\lambda = -\alpha^2$.

b) Montrer que E_1 est un plan vectoriel admettant pour base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (a, \frac{1}{\alpha}u(a))$.

c) Montrer que E_1 est stable par u et que la restriction de u à E_1 a pour matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ relativement à $\mathcal{B}_1$.

d) Montrer que E_1 est orthogonal à $\mathrm{Ker}(u)$.

e) Montrer que $G = (\mathrm{Ker}(u) \oplus E_1)^\perp$ est stable par u.

7) Soit u_1 la restriction de u à G.

a) Montrer que pour tout $y \in G$, $u_1(y)$ est orthogonal à y.

b) Montrer que u_1 est injectif.

8) a) On pose $\mathrm{rang}(u) = 2k$. Montrer qu'il existe des plans vectoriels $E_1, \ldots, E_k$ deux à deux orthogonaux, stables par u et pour $i = 1, \ldots, k$ une base orthonormée

$\mathcal{B}_i$ tels que la matrice dans la base $\mathcal{B}_i$ de la restriction u_i de u à E_i soit de la forme M_{α_i}.

b) Quelle est la matrice de u dans une base orthonormale de E adaptée à la décompostion $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus E_1 \ldots \oplus E_k$?