Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MT06

26 Février 2018

Pb n^0 1

à rendre pour le 16 Mars 2018

Exercice 1

Soit $E = \mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B}_0 = (\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \vec{\epsilon}_4)$ sa base canonique.
On considère la forme quadratique q définie sur E par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2yz + 2yt.$$

1. (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.

(b) La forme quadratique q est-elle non-dégénérée ?

2. On considère les vecteurs

$$\vec{u}_1 = \vec{\epsilon}_1, \quad \vec{u}_2 = 2\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_3, \quad \vec{u}_3 = 3\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_4$$

et $F = Vect(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\})$.

(a) Déterminer la dimension de F.

(b) Déterminer l'orthogonal de F pour q. Quelle est sa dimension ?

(c) Retrouver la réponse à la question 1(b) en donnant un nouvel argument.

3. (a) Déterminer la signature de q.

(b) Retrouver la réponse à la question 1(b) en donnant encore un autre argument.

4. Déterminer le noyau de q.

5. Déterminer une base de E qui soit q-orthogonale.

Exercice 2

Cet exercice reprend la question (c) de l'exercice 3 de la feuille de TD 2 en suggérant une démonstration.

1. Montrer par récurrence sur la dimension de E que pour toute forme quadratique q sur un espace vectoriel E de dimension finie , il existe une base q-orthogonale de E (c'est un résultat vu en cours).

2. Montrer que q est non dégénérée si et seulement si les vecteurs d'une base q-orthogonale de E sont non-isotropes.

3. Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $E = F \oplus F^{\perp}$. Soit $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, où

$\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in F^{\perp}$ la décomposition de $\vec{x} \in E$ dans cette somme directe. Exprimer $\vec{y}$ en fonction de $\vec{x}$ à l'aide d'une base q_F-orthogonale $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ de F, où q_F est la restriction de q à F.

4. Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que la restriction q_F de q à F est non-dégénérée si et seulement si $E = F \oplus F^{\perp}$.