Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MA02 Algèbre III

18 Mars 2011

Examen Partiel
Documents et calculatrices interdits

Question de cours :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et H un sous-espace vectoriel de E.
Enoncer trois conditions équivalentes à "H est un hyperplan de E"

Exercice 1

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2) = (1, X, X^2)$ sa base canonique et par $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_0^*, \epsilon_1^*, \epsilon_2^*)$ la base duale.

1. a) Montrer que l'application ψ définie sur E par : $\forall P \in E$, $\psi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)dt$ est une forme linéaire sur E.

b) Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrer que l'application φ_a définie sur E par : $\forall P \in E$, $\varphi_a(P) = P(a)$ est une forme linéaire sur E.

c) Déterminer les coordonnées de φ_a dans la base $\mathcal{B}_0^*$.

d) Montrer que $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ est une base de E^*.

2. On considère l'application S de E dans E qui à tout $P \in E$ associe $Q \in E$ tel que $Q(X) = P(-X)$.

a) Montrer que S est un endomorphisme de E et que $S^2 = Id_E$.

b) Montrer que ψ et φ_0 sont invariants par la transposée ${}^tS$ de S.

c) Déterminer ${}^tS(\varphi_1)$. En déduire ${}^tS(\varphi_{-1})$.

d) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$ unique tel que $\psi = \alpha\varphi_{-1} + \beta\varphi_0 + \gamma\varphi_1$ (on ne demande pas ici de calculer α, β, γ).

e) En utilisant la question 2.b), trouver une relation simple entre α et γ.

f) Déterminer la base (e_0, e_1, e_2) de E dont $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ est la base duale.

g) En déduire les valeurs de α, β, γ.

T.S.V.P.

Exercice 2

Soient $E = \mathbf{R}^4$, $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ la base canonique et $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*, \epsilon_4^*)$ la base duale.

1. On considère les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sur E définies par
$\varphi_1(x, y, z, t) = x - y + z - 2t$
$\varphi_2(x, y, z, t) = x - y - 2z + t$
$\varphi_3(x, y, z, t) = 2x - 2y - z - t.$

   a) Déterminer les coordonnées de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dans la base $\mathcal{B}_0^*$.

   b) La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ?

2. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x - y + z - 2t = x - y - 2z + t = 2x - 2y - z - t = 0\}$.

   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

   b) Déterminer la dimension de F, puis une base de F.

3. On considère la forme quadratique sur E définie par
$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + t^2 - 2xy + 2xt - 2yt + 4zt$

   a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.

   b) Déterminer l'orthogonal de F pour q. Quelle est sa dimension ?

   c) Peut-on déduire de *b*) si q est dégénérée ou non ?

   d) Déterminer la signature de q ?

   e) Déterminer le rang et le noyau de q.