Département de Mathématiques
Université d'Orléans

L4 MT 02 : Algèbre III
2007-2008

Corrigé du Partiel du 12 Mars 2008

Exercice I :

1. Si ψ appartient à Vect $(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\})$ alors il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ tels que $\psi = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \varphi_i$.

   Pour tout $x \in \bigcap_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(\varphi_i)$ on a $\psi(x) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \varphi_i(x) = 0$. Donc $x \in \operatorname{Ker}(\psi)$.

   D'où $\bigcap_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(\varphi_i) \subset \operatorname{Ker}(\psi)$.

2. On a $\dim(F) = \dim(E) - \operatorname{rang}(\varphi_1, \ldots, \varphi_d) = n - d$, car la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ est libre.

3. On a $\dim(\bigcap_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(\varphi_i) \bigcap \operatorname{Ker}(\psi)) = \dim(E) - \operatorname{rang}(\varphi_1, \ldots, \varphi_d, \psi)$.

   Si on suppose que $\bigcap_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(\varphi_i) \subset \operatorname{Ker}(\psi)$ alors $F = F \bigcap \operatorname{Ker}(\psi)$, et $n - d = n - \operatorname{rang}(\varphi_1, \ldots, \varphi_d, \psi)$.
   D'où $d = \operatorname{rang}(\varphi_1, \ldots, \varphi_d, \psi)$. Comme $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ est une famille libre de d vecteurs, il en résulte que ψ appartient à Vect $(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\})$

Exercice II :

1. La matrice de q dans $\mathcal{B}_0$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) On a $D^\perp = \{v\}^\perp$ et le vecteur $u = (x, y, z, t)$ appartient à $D^\perp$ si et seulement si $f(u, v) = 0$ ce qui se traduit matriciellement par $(x, y, z, t)\, A \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v) = 0$, soit encore $2t = 0$.
   Donc $D^\perp$ est l'hyperplan d'équation $t = 0$ dans $\mathcal{B}_0$, c'est le noyau de ε_4^*. On a $\dim(D^\perp) = 3$.

   (b) . On a $D^\perp = \operatorname{Ker}(\varepsilon_4^*)$ et donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $D^\perp$.

   (c) On a $D^{\perp\perp} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}^\perp$ et le vecteur $u = (x, y, z, t)$ appartient à $D^{\perp\perp}$ si et seulement si $f(u, \varepsilon_i) = 0$ pour $i \in [1, 3]_{\mathbb{N}}$. On obtient le système d'équations : $\begin{cases} x - y - z & = 0 \\ -x + y + z + 2t & = 0 \\ -x + y + z & = 0 \end{cases}$

   qui est équivalent à $\begin{cases} x - y - z & = 0 \\ t & = 0 \end{cases}$ Donc $D^{\perp\perp} = \operatorname{Ker}(\varphi_1) \cap \operatorname{Ker}(\varepsilon_4^*)$.

   Les formes linéaires φ_1 et ε_4^* n'étant pas proportionnelles on a donc $\dim(D^{\perp\perp}) = 4 - 2 = 2$.

   (d) Si q était non dégénérée on aurait $D = D^{\perp\perp}$, ce qui n'est pas le cas. Donc q est dégénérée. (On peut aussi remarquer que $\dim(D^{\perp\perp}) + \dim(D^\perp) = 2 + 3 \neq 4 = \dim(E)$).

3. (a) On a $\varphi_1 = \varepsilon_1^* - \varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*$, $\varphi_2 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_4^*$, $\varphi_3 = \varepsilon_2^* - \varepsilon_4^*$ et $\varphi_4 = \varepsilon_3^*$.

   (b) La matrice des coordonnées de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ dans la base $\mathcal{B}_0^*$ est
   $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } \det(Q) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$
   $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est donc une base de E^*.

   (c) Soit $\mathcal{B}$ la base dont $\mathcal{B}'$ est la base duale. La matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est ${}^tQ^{-1}$.

Déterminons Q^{-1}, par exemple, par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $u_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ et $u_4 = (1,0,1,0)$.

4. (a) Appliquons la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned} q(u) &= x^2 - 2x(y+z) + y^2 + z^2 + 2yz + 4yt \\ &= (x-(y+z))^2 - (y+z)^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 4yt \\ &= (x-y-z)^2 + 4yt \\ &= (x-y-z)^2 + (y+t)^2 - (y-t)^2 \end{aligned}$$

On a donc $q = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2$ et la signature de q est $(2,1)$.

(b) Le rang de q est 2+1=3. Son noyau est de dimension 1 et a pour système d'équations $\begin{cases} x-y-z &= 0 \\ y+t &= 0 \\ y-t &= 0 \end{cases}$, soit encore $y = t = 0$ et $z = x$. D'où $N(q) = \text{Vect}\{(1,0,1,0)\}$.

(c) La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ obtenue par la méthode de Gauss est libre dans E^* ; d'après la question 3 (b) nous pouvons la compléter par $\varphi_4 = \varepsilon_3^*$ pour obtenir $\mathcal{B}'$ base de E^*. La base $\mathcal{B}$ dont $\mathcal{B}'$ est la base duale est q orthogonale.

Puisque $q = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2$ la matrice de q dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$