Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MA02 Algèbre III

21 Mai 2012

Examen
Première Session
durée : 2 heures
Documents et appareils électroniques interdits

Questions de cours :

1) Enoncer et démontrer l'identité du parallélogramme dans un espace pré-hilbertien réel $(E, <, >)$.

2) Qu'est-ce-qu'un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien ? Que pouvez-vous dire sur la diagonalisation des endomorphismes symétriques ?

Exercice 1

Soient φ_1, φ_2 et φ_3 les formes linéaires sur $E = \mathbf{R}^3$ définies par

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = x + 2y \\ \varphi_2(x,y,z) = x + y - z \\ \varphi_3(x,y,z) = y + z \end{cases}$$

a) Déterminer les coordonnées de chaque φ_i dans la base $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*)$ duale de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

b) La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ?

c) Déterminer la dimension de $F = \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_3)$.

d) On pose $q = \frac{1}{2}\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\varphi_2^2 - \frac{1}{2}\varphi_3^2$. Justifier que q est une forme quadratique sur E.

e) Déterminer la signature, le rang et le noyau de q.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2a \\ 2 & 1 & 2a \\ 2 & -2 & -a \end{pmatrix}$$

a) Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.

b) Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de f_a.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit k un nombre réel strictement positif. On dit qu'un endomorphisme u de E est une similitude de rapport k si pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dit qu'un endomorphisme u de E préserve l'orthogonalité si $< x, y >= 0 \Rightarrow < u(x), u(y) >= 0$.

a) Quelles sont les similitudes de rapport 1 ?

b) Donner un exemple de similitude de rapport 2.

c) Soit u une similitude de rapport k. Montrer que pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a $< u(x), u(y) >= k^2 < x, y >$.

d) Montrer que si u est une similitude, alors u préserve l'orthogonalité et est bijectif.

e) Soit $(x, y) \in E \times E$. Montrer $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux si et seulement si x et y ont même norme.

f) Soient x et y orthogonaux et de même norme. Montrer que si u préserve l'orthogonalité, alors $u(x)$ et $u(y)$ sont orthogonaux et ont même norme.

g) Soit u un endomorphisme bijectif qui préserve l'orthogonalité et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthogonale dont les vecteurs ont même norme.

h) Avec les notations de la question précédente, on note k la valeur commune des normes $\|u(e_i)\|$. Montrer que $v = \frac{1}{k}u$ est un endomorphisme orthogonal.

i) Montrer qu'un endomorphisme bijectif qui préserve l'orthogonalité est une similitude.