Département de Mathématiques
Université d'Orléans

L4 MT 02 : Algèbre III
2006-2007

Première Session

Lundi 14 Mai 2007

14h-16h

Documents et calculatrices interdits

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Questions de cours :

1. Donner le tableau de classification des endomorphismes orthogonaux en dimension 3.
2. Soient E et F des espaces euclidiens et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Enoncer et démontrer les formules permettant de calculer le noyau et l'image de l'adjoint u^* en fonction du noyau et l'image de u.

Exercice I :

On considère $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on note e_λ la fonction de E, $e_\lambda : x \longmapsto e^{\lambda x}$ (en particulier e_0 est la fonction constante égale à 1).
On note D l'endomorphisme de dérivation : pour tout $f \in E,\ D(f) = f'$.

1. Déterminer le noyau de D et en donner une base.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On désigne par $E_\lambda(D)$ le sous-espace propre de D relatif à λ.

2. (a) Soit $f \in E$. On considère $g = f\, e_{-\lambda} : x \longmapsto f(x)e^{-\lambda x}$.
   Montrer que f appartient à $E_\lambda(D)$ si et seulement si g appartient à $\mathrm{Ker}\,(D)$.
   (b) En déduire que $E_\lambda(D)$ est la droite engendrée par e_λ.

Soit $F = \{\, f \in E\,;\ f''' = f'\,\}$ où f''' est la dérivée troisième de f.

3. (a) En utilisant le lemme des noyaux (vu en 3MT01), montrer que :
   $F = E_0(D) \oplus E_1(D) \oplus E_{-1}(D)$.
   (b) En déduire que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_{-1})$ est une base de F.

On considère les applications φ_i définies sur F par

$$\forall f \in F \qquad \varphi_1(f) = f(0)\,; \quad \varphi_2(f) = f''(0)\,; \quad \varphi_3(f) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\, dt\,.$$

4. (a) Déterminer les coordonnées de chaque φ_i dans la base $\mathcal{B}^* = (e_0^*, e_1^*, e_{-1}^*)$ duale de $\mathcal{B}$.
   (b) La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ? Déterminer son rang.
   (c) Déterminer la dimension de $G = \mathrm{Ker}\,(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi_2) \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi_3)$.
   (d) Vérifier que la fonction sh (*sinus hyperbolique*) appartient à G.
   (e) Déterminer G.

Exercice II :

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel et de $\mathcal{B}_0$ sa base canonique.
On considère les vecteurs $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,0,1,0)$, $u_3 = (1,0,0,1)$ et $F = \text{Vect}(\{u_1, u_2, u_3\})$.

1. (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
   (b) Déterminer une base orthogonale de F.
   (c) Déterminer la projection orthogonale de $u = (1,1,0,0)$ sur F.
2. On considère la forme quadratique q définie sur E par :
$$\forall (x,y,z,t) \in E \quad q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt\ .$$
   (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.
   (b) Déterminer l'orthogonal de F pour q. Quelle est sa dimension ?
   (c) La forme quadratique q est-elle non-dégénérée ?
3. (a) Déterminer la signature, le rang et le noyau de q.
   (b) Déterminer une base de E qui soit q-orthogonale.

Exercice III :

Soient E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. (a) Montrer que $f^* \circ f$ est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
   (b) Montrer que toute valeur propre de $f^* \circ f$ appartient à $\mathbb{R}_+$.
2. Pour $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$, on note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i de $f^* \circ f$ (c'est à dire $f^* \circ f(e_i) = \lambda_i e_i$) et on suppose que : $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.
   (a) Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.
   Calculer $\|x\|^2$ et $\|f(x)\|^2 - \lambda_1 \|x\|^2$ en fonction des x_i et des λ_i.
   (b) Montrer que $\|f(x)\|^2 \leqslant \lambda_1 \|x\|^2$.
   (c) Montrer que $\|f(x)\|^2 = \lambda_1 \|x\|^2$ si et seulement si $x \in E_{\lambda_1}(f^* \circ f)$.
   (d) En déduire que $\lambda_1 = \max\{\ \|f(x)\|^2\ ;\ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\ \}$.