Université d'Orléans
Département de Mathématiques
28 Juin 2011
L4MA02 Algèbre III

Examen
Deuxième Session
durée : 2 heures
Documents et appareils électroniques interdits

Questions de cours :

1) Enoncer le théorème de Sylvester sur les formes quadratiques réelles.

2) Donner 4 propriétés équivalentes caractérisant un endomorphisme *orthogonal* $u \in \mathcal{L}(E)$ d'un espace vectoriel euclidien E.

Exercice 1

On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbf{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 4yz - 2xz.$$

1) Ecrire la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

2) Calculer le rang de A.

3) Appliquer la méthode de Gauss pour décomposer q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaire indépendantes.

4) Utiliser la question précèdente pour déterminer la signature et le rang de q. Quelle relation existe-t-il entre le rang d'une forme quadratique et le rang de sa matrice dans une base quelconque ?

5) Déterminer le noyau de q.

6) Déterminer une base q-orthogonale de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1-a) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.

2) Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de f_a.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $u \in O(E)$ un endomorphisme orthogonal de E. On suppose que pour tout $x \in E$, $u(x)$ est orthogonal à x.

1) Donner en dimension 2 un exemple d'un tel endomorphisme.

2) On considère φ définie sur $E \times E$ par :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad \varphi(x,y) = < x, u(y) > + < u(x), y > .$$

(a) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

(b) Quelle est la forme quadratique associée ? Que pouvez-vous conclure sur φ ?

(c) En déduire que $u^* = -u$.

3) En utilisant le déterminant, montrer que n est pair.

4) Montrer que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

Exercice 4

Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

1) Montrer que la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est libre.

2) Déterminer une base orthogonale $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ de F. En déduire une base orthogonale directe $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ de $\mathbf{R}^3$. Donner une base de $F^\perp$.

3) Soit $X = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbf{R}^3$. Calculer les projections orthogonales $P_F(X)$ de X sur F et $P_{F^\perp}(X)$ de X sur $F^\perp$.

4) Déterminer la matrice, relativement à $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale P_F sur F. Que vaut sa trace ?

5) Déterminer la matrice, relativement à $\mathcal{B}$, de la symétrie orthogonale par rapport à F.