Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MA02

14 Mars 2011

NOM : CORRIGE

Interrogation n^0 3

Opérer la réduction de Gauss et déterminer la signature, le rang et le noyau de la forme quadratique suivante :
$q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ donnée par $q(x, y, z, t) = xy + 2xz + xt + 2yt + 4zt$.

$$
\begin{aligned}
q(x,y,z,t) &= x(y+2z+t) + 2yt + 4zt \\
&= (x+2t)y + 2xz + xt + 4zt \\
&= (x+2t)(y+2z+t) - 2t^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[(x+2t+y+2z+t)^2 - (x+2t-y-2z-t)^2\right] - 2t^2 \\
&= \frac{1}{4}(x+y+2z+3t)^2 - \frac{1}{4}(x-y-2z+t)^2 - 2t^2
\end{aligned}
$$

signature$(q) = (1, 2)$

rang$(q) = 3$

$$q(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} x & y & z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = {}^tXAX$$

$N(q) = \mathrm{Ker}\,A$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x + 2t = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2t = 0 \\ x - 2t = 0 \\ y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = t = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$