**Département de Mathématiques**
**Université d'Orléans**

**L4 MT 02 : Algèbre III**
**2006-2007**

**Corrigé de l'épreuve du 14 Mai 2007**

**Exercice I :**

1. Soit $f \in \mathrm{Ker}\,(D)$. On a $f' = 0$, c'est à dire $f$ est constante. Par suite $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(\{e_0\})$.
2. (a) D'après la formule de dérivation d'un produit de fonctions, on a $D(g) = D(f)e_{-\lambda} - \lambda f e_{-\lambda}$. D'où, $g \in \mathrm{Ker}\,(D)$ si et seulement si $D(f)e_{-\lambda} - \lambda f e_{-\lambda} = 0$ soit $D(f) = \lambda f$ car la fonction $e_{-\lambda}$ ne s'annule jamais.
   Il en résulte que $f$ appartient à $E_\lambda(D)$ si et seulement si $g$ appartient à $\mathrm{Ker}\,(D)$.

   (b) D'après les questions précédentes, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \in E_\lambda(D) &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} \quad g = \mu\, e_0 \\ &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} \quad f e_{-\lambda} = \mu\, e_0 \\ &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} \quad f = \mu\, e_\lambda \end{aligned}$$

   Par conséquent $E_\lambda(D)$ est la droite engendrée par $e_\lambda$.
3. (a) On a $F = \{ f \in E \,;\, D^3(f) - D(f) = 0 \} = \mathrm{Ker}\,(D^3 - D)$. Or $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ et les polynômes $X$, $X-1$ et $X+1$ sont deux à deux premiers entre eux. On peut donc appliquer le lemme des noyaux et on obtient :
   $\mathrm{Ker}\,(D^3 - D) = \mathrm{Ker}\,(D) \oplus \mathrm{Ker}\,(D - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(D + \mathrm{Id}_E)$ i.e. $F = E_0(D) \oplus E_1(D) \oplus E_{-1}(D)$.

   (b) D'après la question 2, $E_0(D)$, $E_1(D)$ et $E_{-1}(D)$ sont des droites engendrées respectivement par $e_0$, $e_1$ et $e_{-1}$. Il en résulte que $(e_0, e_1, e_{-1})$ est une base de $F$.
4. (a) On a $\varphi_i = \varphi_i(e_0)e_0^* + \varphi_i(e_1)e_1^* + \varphi_i(e_{-1})e_{-1}^*$. D'où $\varphi_1 = e_0^* + e_1^* + e_{-1}^*$.
   Comme $(e_0)'' = 0$, $(e_1)'' = e_1$ et $(e_{-1})'' = e_{-1}$, il vient $\varphi_2 = e_1^* + e_{-1}^*$.
   Enfin $\varphi_3 = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_{-1}^{1} dt\right) e_0^* + \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_{-1}^{1} e^t\,dt\right) e_1^* + \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-t}\,dt\right) e_{-1}^* = e_0^* + \mathrm{sh}(1)e_1^* + \mathrm{sh}(1)e_{-1}^*$.
   En résumé, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \mathrm{sh}(1) \\ 1 & 1 & \mathrm{sh}(1) \end{pmatrix}$.

   (b) Les deux dernières lignes de la matrice précédente étant identiques, la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ n'est pas libre. Il est clair que les deux premières colonnes de la matrice précédente sont non proportionnelles, par conséquent le rang de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est 2.

   (c) On a $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi_2) \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi_3)) = \dim(F) - \dim(\mathrm{Vect}\,(\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\})) = 3 - 2$, d'où $\dim(G) = 1$.

   (d) On a $(\mathrm{sh})'' = \mathrm{sh}$ d'où $\mathrm{sh} \in F$. De plus $(\mathrm{sh})''(0) = \mathrm{sh}(0) = 0$ et $\varphi_3(\mathrm{sh}) = 0$ car sh est une fonction impaire. Il en résulte que la fonction sh appartient à $G$.

   (e) D'après les questions (c) et (d), $G$ est la droite engendrée par la fonction sh.

**Exercice II :**

1. (a) Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$. On a alors $(\alpha + \beta + \gamma, 0, \beta, \gamma) = (0,0,0,0)$, d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $(u_1, u_2, u_3)$ est donc libre.

   (b) En appliquant le principe d'orthogonalisation de Schmidt à la famille libre $(u_1, u_2, u_3)$, on obtient une famille orthogonale $(e_1, e_2, e_3)$ telle que $\mathrm{Vect}\,(\{e_1, e_2, e_3\}) = \mathrm{Vect}\,(\{u_1, u_2, u_3\})$, c'est à dire une base orthogonale de $F$. La famille $(e_1, e_2, e_3)$ est donnée par les formules suivantes :

$e_1 = u_1 = (1,0,0,0) \quad ; \quad e_2 = u_2 - \dfrac{\langle e_1 \, , \, u_2 \rangle}{\langle e_1 \, , \, e_1 \rangle} e_1 = u_2 - e_1 = (0,0,1,0) \;;$

$e_3 = u_3 - \dfrac{\langle e_1 \, , \, u_3 \rangle}{\langle e_1 \, , \, e_1 \rangle} e_1 - \dfrac{\langle e_2 \, , \, u_3 \rangle}{\langle e_2 \, , \, e_2 \rangle} e_2 = u_3 - e_1 = (0,0,0,1) \, .$

(c) Désignons par $p(u)$ la projection orthogonale de $u$ sur $F$. La base $(e_1, e_2, e_3)$ étant en fait orthonormale on a : $p(u) = \sum_{i=1}^{3} \langle e_i \, , \, u \rangle \, e_i = 1\, e_1 + 0\, e_2 + 0\, e_3 = e_1 = (1,0,0,0) \, .$

2. (a) On a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $F^{\perp} = (\mathrm{Vect}(\{u_1, u_2, u_3\}))^{\perp} = \{u_1, u_2, u_3\}^{\perp}$. Or $v = (x,y,z,t) \in {u_1}^{\perp} \Leftrightarrow (x,y,z,t) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

c'est à dire $(x,y,z,t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ soit encore $x + z + t = 0$.

De même on obtient $v \in {u_2}^{\perp} \Leftrightarrow 2x + y + z + t = 0$ et $v \in {u_3}^{\perp} \Leftrightarrow 2x + y + z + t = 0$. Donc

$$\begin{aligned} v \in F^{\perp} & \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t & = 0 \\ 2x + y + z + t & = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t & = 0 \\ x + y & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $F^{\perp} = \{(x, -x, z, -x-z) \; ; \; (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$, $\big((1,-1,0,-1), (0,0,1,-1)\big)$ est une base de $F^{\perp}$ et $\dim(F^{\perp}) = 2$.

(c) La forme quadratique $q$ est dégénérée car on a : $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = 5 \neq 4 = \dim(E)$.

3. (a) Appliquons la méthode de Gauss pour décomposer $q$ en combinaison linéaire d'une famille libre de formes linéaires : $\forall (x,y,z,t) \in E$

$$\begin{aligned} q(x,y,z,t) & = (x+z+t)^2 - (z+t)^2 + y^2 + 2yz + 2yt \\ & = (x+z+t)^2 + y^2 - z^2 - t^2 + 2yz + 2yt - 2zt \\ & = (x+z+t)^2 + (y+z+t)^2 - (z+t)^2 - z^2 - t^2 - 2zt \\ & = (x+z+t)^2 + (y+z+t)^2 - 2(z+t)^2 \, . \end{aligned}$$

Notons $(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \varepsilon_4^*)$ la base duale de $\mathcal{B}_0^*$ et posons $\varphi_1 = \varepsilon_1^* + \varepsilon_3^* + \varepsilon_4^*$, $\varphi_2 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* + \varepsilon_4^*$ et $\varphi_3 = \varepsilon_3^* + \varepsilon_4^*$. Nous obtenons alors $q = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_3^2$.
D'où la signature de $q$ est $(2,1)$, son rang 3 et son noyau l'ensemble des vecteurs $(x,y,z,t)$ tels que : $\begin{cases} x + z + t & = 0 \\ y + z + t & = 0 \\ z + t & = 0 \end{cases}$. D'où $N(q) = \mathrm{Vect}(\{(0,0,1,-1)\})$.

(b) Complétons $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ pour obtenir une base de $E^*$, par exemple par $\varepsilon_4^*$.

$Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0^*}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon_4^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est bien inversible car de déterminant 1.

Soit $\mathcal{B}$ la base de $E$ dont $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon_4^*)$ est la base duale. Alors $\mathcal{B}$ est $q$-orthogonale. Si $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ alors ${}^tP^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0^*$ à $\mathcal{B}^*$. Donc $Q = {}^tP^{-1}$, soit $P = {}^tQ^{-1}$. Tous calculs faits on obtient :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } {}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ base $q$-orthogonale en posant :
$u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,1,0,0)$, $u_3 = (-1,-1,1,0)$ et $u_4 = (0,0,-1,1)$.

**Exercice III :**

1. (a) L'endomorphisme $f^* \circ f$ est symétrique car : $(f^* \circ f)^* = f^* \circ f^{**} = f^* \circ f$. Il est donc diagonalisable dans une base orthonormale.

   (b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $f^* \circ f$. Il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $f^* \circ f(x) = \lambda x$. On a alors $\lambda \|x\|^2 = \langle \lambda x, x \rangle = \langle f^* \circ f(x), x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2$. D'où $\lambda = \dfrac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}$ appartient à $\mathbb{R}_+$.

2. (a) Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle f^* \circ f(x), x \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle$.
   Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, on a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ et $\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.
   D'où $\|f(x)\|^2 - \lambda_1 \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_1) x_i^2$.

   (b) Comme $(\lambda_i - \lambda_1) \leqslant 0$ et $x_i^2 \geqslant 0$ pour tout $i \in [1,n]_{\mathbb{N}}$, on a $\|f(x)\|^2 - \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant 0$ c'est à dire $\|f(x)\|^2 \leqslant \lambda_1 \|x\|^2$.

   (c) Puisque $(\lambda_i - \lambda_1) x_i^2 \leqslant 0$ pour tout $i \in [1,n]_{\mathbb{N}}$, $\|f(x)\|^2 = \lambda_1 \|x\|^2$ si et seulement si pour tout $i \in [1,n]_{\mathbb{N}}$ $(\lambda_i - \lambda_1) x_i^2 = 0$, c'est à dire $x_i = 0$ pour tout $i$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_1$. En conséquence $\|f(x)\|^2 = \lambda_1 \|x\|^2$ si et seulement si $x$ appartient à $\mathrm{Vect}(\{e_i ; \lambda_i = \lambda_1\}) = E_{\lambda_1}(f^* \circ f)$.

   (d) Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ on a $\|f(x)\|^2 \leqslant \lambda_1$ et pour $e_1$ on a $\|f(e_1)\|^2 = \lambda_1$. Donc $\lambda_1 = \max\{ \|f(x)\|^2 ; \|x\| = 1 \}$.