Département de Mathématiques
Université d'Orléans

L4 MT 02 : Algèbre III
2005-2006

Corrigé de l'épreuve du 6 Juin 2006

Exercice I :

1. On a $\varphi_1 = \varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*$, $\varphi_2 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*$ et $\varphi_3 = \varepsilon_1^* + \varepsilon_3^*$.

2. La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ n'est pas libre car $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$.

3. La famille (φ_1, φ_2) est libre car φ_1 et φ_2 ne sont pas proportionnelles. Donc $\text{rang}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 2$.
Par suite $\dim(\text{Ker}(\varphi_1) \cap \text{Ker}(\varphi_2) \cap \text{Ker}(\varphi_3)) = \dim(E) - \text{rang}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 3 - 2 = 1$.

4. L'application q combinaison linéaire de carrés de formes linéaires est une forme quadratique sur E.

5. Comme $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ n'est pas libre on ne peut pas déduire la signature de l'écriture $q = \varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_3^2$.
Explicitons $q(v)$. On a : $q(v) = (x-y)^2 - (y+z)^2 + (x+z)^2 = 2x^2 - 2xy - 2yz + 2xz$.
Appliquons la méthode de Gauss :
$q(v) = 2\Big((x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z)^2 - (-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z)^2\Big) - 2yz = 2(x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z)^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 - yz$
$q(v) = 2(x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z)^2 - \frac{1}{2}(y+z)^2$.
La signature de q est donc $(1,1)$ et son rang est 2.
Le vecteur $v = (x, y, z)$ appartient au noyau de q si et seulement si :
$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ c'est à dire $v \in \text{Vect}(1, 1, -1)$.

Exercice II :

Désignons par C_1, C_2 et C_3 les vecteurs colonnes de A. L'endomorphisme f est orthogonal si et seulement si (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormale de E. Or
$\langle C_1 , C_2 \rangle = \dfrac{1}{9}(-2+4-2) = 0$, $\langle C_1 , C_3 \rangle = \dfrac{1}{9}(4-2-2) = 0$ et $\langle C_2 , C_3 \rangle = \dfrac{1}{9}(-2-2+4) = 0$.
Ces vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux. De plus $\|C_1\|^2 = \dfrac{1}{9}(4+4+1)$, $\|C_2\|^2 = \dfrac{1}{9}(1+4+4) = 1$ et $\|C_3\|^2 = \dfrac{1}{9}(4+1+4) = 1$. Par conséquent $f \in O(E)$.
C'est un endomorphisme non symétrique ; sa trace vaut 2. Déterminons l'ensemble des vecteurs invariants. On obtient le système :
$\begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$ équivalent à $x = y = z$. Donc f est une rotation d'axe dirigé par u de coordonnées $(1,1,1)$. Son angle θ est tel que $1 + 2\cos\theta = \text{Tr}(f) = 2$; d'où $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$. Donc $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$. Choisissons un vecteur non colinéaire à u par exemple e_1. Comme $\det(e_1, f(e_1), u) = \dfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, f est la rotation d'axe dirigé par u et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Problème

1. (a) Un endomorphisme symétrique u est normal car $u^* \circ u = u^2 = u \circ u^*$.
   (b) Un endomorphisme orthogonal u est normal car $u^* = u^{-1}$ et $u^* \circ u = \text{Id}_E = u \circ u^*$.
   (c) Puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme f est normal, on a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ c'est à dire $\mathcal{S} = \begin{cases} a^2 + b^2 = a^2 + c^2 \\ ac + bd = ab + cd \\ c^2 + d^2 = b^2 + d^2 \end{cases}$
   $\mathcal{S} \iff \begin{cases} b^2 = c^2 \\ ac + bd = ab + cd \end{cases}$, $\mathcal{S} \iff \begin{cases} (b-c)(b+c) = 0 \\ (b-c)(d-a) = 0 \end{cases}$
   Comme f est non symétrique, $b \neq c$ et on a donc $c = -b$ et $d = a$.

2. (a) Pour tout $x \in E$, on a :
$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^* \circ u(x) \rangle = \langle x, u \circ u^*(x) \rangle = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = \|u^*(x)\|^2$.
D'où $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

(b) Soit $x \in E$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(u^*) &\iff u^*(x) = 0 \\ &\iff \|u^*(x)\| = 0 \\ &\iff \|u(x)\| = 0 \\ &\iff u(x) = 0 \\ &\iff x \in \operatorname{Ker}(u) \end{aligned}$$

D'où $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^*)$. Par suite $\operatorname{Im}(u^*) = (\operatorname{Ker}(u))^\perp = (\operatorname{Ker}(u^*))^\perp = \operatorname{Im}(u)$.

(c) $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^* = u^* - \lambda \mathrm{Id}_E$. Comme u^* commute avec u et évidemment avec $\lambda \mathrm{Id}_E$, il en résulte que $u^* - \lambda \mathrm{Id}_E$ commute avec $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ et par suite $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est normal.

(d) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$. D'après les questions précédentes on a l'égalité $\operatorname{Ker}(u^* - \lambda \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. D'où $\lambda \in \mathrm{Sp}(u^*)$ et $E_\lambda(u) = E_\lambda(u^*)$.

(e) Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u) = E_\mu(u^*)$. On a alors
$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \langle x, y \rangle \mu$.
Comme λ et μ sont deux valeurs propres distinctes on en déduit que $\langle x, y \rangle = 0$. D'où $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

3. (a) Pour tout $y \in F^\perp$ et tout $x \in F$ on a $\langle f(y), x \rangle = \langle y, f^*(x) \rangle = 0$, car par stabilité $f^*(x) \in F$. Donc $f(y)$ appartient à $F^\perp$. Donc $F^\perp$ est stable par f. En échangeant les rôles de f et f^* on obtient que $F^\perp$ est stable par f^*.

(b) Pour tout $(y, z) \in F^2$ on a $\langle g(y), z \rangle = \langle f(y), z \rangle = \langle y, f^*(z) \rangle = \langle y, g'(z) \rangle$.
D'où $g^*(z) = g'(z)$ pour tout $z \in F$. Donc g' est l'adjoint de g.

(c) Pour tout $y \in F$, $g(y)$ et $g^*(y)$ appartiennent à F et on a
$g^* \circ g(y) = g^*(f(y)) = f^*(f(y) = f \circ f^*(y) = f(g^*(y) = g \circ g^*(y)$. Donc g est normal.

4. (a) Si $F = \{0\}$ alors $G = E$. Par conséquent u est diagonalisable. Comme ses sous-espaces propres sont orthogonaux, u est diagonalisable dans une base orthonormale et u est un endomorphisme symétrique.

(b) Tout $x \in G$ se décompose en $x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$ avec $x_\lambda \in E_\lambda(u)$. D'où $u(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda x_\lambda$ appartient à G. Par conséquent G est stable par u.
Puisque u est normal $E_\lambda(u^*) = E_\lambda(u)$ et $u^*(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$; donc G est aussi stable par u^*.

(c) D'après la question 3(a), F est stable par u et par u^*.

(d) On peut appliquer le résultat de 3(c) et v est normal.

(e) Supposons que λ soit valeur propre de v. Il existe $x \in F$ non nul tel que $\lambda x = v(x) = u(x)$. Par conséquent λ appartient à $\mathrm{Sp}(u)$ et x appartient à $E_\lambda(u)$ donc à G. Comme $F \cap G = \{0\}$ on aboutit à une contradiction.

(f) $s^* = (v^* \circ v)^* = v^* \circ v = s$. L'endomorphisme s de F est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormale de F.

5. (a) Remarquons que puisque v est normal, $s = v^* \circ v = v \circ v^*$. Soit $x \in F_\alpha$. On a
$s(v(x)) = v \circ v^* \circ v(x) = v \circ s(x) = v(\alpha x) = \alpha v(x)$; d'où $v(x) \in F_\alpha$ et F_α est stable par v.
On a également $s(v^*(x)) = v^* \circ v \circ v^*(x) = v^* \circ s(x) = v^*(\alpha x) = \alpha v^*(x)$; d'où $v^*(x) \in F_\alpha$ et F_α est stable par v^*.
D'après la question 3(a), l'orthogonal de F_α dans F est aussi stable par v et v^*.

(b) Tout vecteur propre vecteur de w est vecteur propre de v, or v ne possède pas de valeur propre ; donc w ne possède pas de valeur propre.

(c) D'après un résultat du cours, tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle possède une droite ou un plan stable. Or $F_\alpha \neq \{0\}$ car α est valeur propre pour s, de plus w n'admet pas de valeur propre, donc pas de droite stable. Il en résulte l'existence d'un plan P stable par w.

(d) Le vecteur $w(x)$ appartient à P, car P est stable par w. Il n'est pas proportionnel au vecteur non nul x car sinon x serait vecteur propre de w ; par suite $(x, w(x))$ est une famille libre de P qui est de dimension 2, donc $(x, w(x))$ est une base de P.

(e) Par stabilité de P, le vecteur $w^2(x)$ appartient à P et il existe donc $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $w^2(x) = \beta x + \gamma w(x)$. Si β était nul on aurait $w^2(x) = \gamma w(x)$ et γ serait valeur propre pour w ce qui est impossible, donc $\beta \in \mathbb{R}^*$.

(f) Puisque $\beta \neq 0$ on a $x = \dfrac{1}{\beta}(w^2(x) - \gamma w(x))$. On en déduit que $(w(x), w^2(x))$ est une famille génératrice de P et par suite une base de P.

(g) On a $w^*(w(x)) = v^* \circ v(x) = s(x) = \alpha x$ et $w^*(w^2(x)) = v^* \circ v \circ v(x) = s(v(x)) = \alpha w(x)$. Par conséquent $w^*(w(x))$ et $w^*(w^2(x))$ appartiennent à P. Il en résulte que P est stable par w^*.

(h) D'après la question 3(c), f est normal ; f est non symétrique car il ne possède pas de valeur propre et d'après 1(c), dans toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de P on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.