Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MA02

2 Avril 2012

Feuille d'exercices n^0 4

Exercice 1

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ symétrique. Montrer que

$$\mathrm{Trace}(M^2 + M + 1) \geq \frac{3n}{4}.$$

Exercice 2

Soit A une matrice symétrique réelle satisfaisant $A^k = \mathrm{Id}$ pour un entier $k \geq 1$. Montrer qu'alors $A^2 = \mathrm{Id}$. Que peut-on dire de plus si k est impair ?

Exercice 3

Soit $E = M_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire défini par : $< M, N >= \mathrm{Trace}({}^tMN)$. Pour tout $B \in E$, on désigne par L_B l'opérateur sur E de multiplication à gauche par B : $L_B(M) = BM$ pour tout $M \in E$.

a) Déterminer l'adjoint de L_B.

b) En déduire que $L_B \in O(E)$ si et seulement si $B \in O_n(\mathbf{R})$.

Exercice 4

Soient $n \geq 3$ et $A \in M_n(\mathbf{R})$ définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = n \quad \text{ou} \quad j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer le rang de A et son noyau.

b) Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 5

Soit $A \in M_{2n+1}(\mathbf{R})$ définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = n+1 \quad \text{ou} \quad j = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer le spectre de A (On pourra déterminer rang(A) et calculer A^2.)

Exercice 6

Soient $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ et $A \in M_n(\mathbf{R})$ définie par $a_{ii} = a$ et $a_{ij} = b$ pour $(i, j) \in [1, \ldots, n]^2$ et $i \neq j$. Déterminer une base orthogonale qui diagonalise A.

Exercice 7

On considère $E = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{B}_0$. Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de E dont les matrices dans $\mathcal{B}_0$ sont :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on considère l'endomorphisme f_a dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -a & -2a & 2a \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles f_a est un endomorphisme orthogonal.

b) Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la nature géométrique de f_a.

Exercice 9

On considère $E = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer les matrices dans la base canonique des endomorphismes orthogonaux suivants :

a) S symétrie orthogonale par rapport à la droite D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

b) S' symétrie orthogonale par rapport au plan P d'équation $x + y + z = 0$

c) R rotation d'axe D dirigé par $\vec{u}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 10

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $u \in L(E)$.

1. a) Montrer que u^*u est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

b) Montrer que toutes les valeurs propres de u^*u sont positives.

2. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note λ_i la valeur propre de u^*u correspondant à e_i et on suppose que ces valeurs propres sont rangées en ordre décroissant.

a) Soit x de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Calculer $\|x\|^2$ et $\|u(x)\|^2 - \lambda_1\|x\|^2$ en fonction des x_i et des λ_i.

b) Montrer que $\|u(x)\|^2 \leq \lambda_1 \|x\|^2$.

c) Montrer que $\|u(x)\|^2 = \lambda_1 \|x\|^2$ si et seulement si x appartient au sous-espace propre de u^*u correspondant à λ_1.

d) En déduire que $\lambda_1 = \max\{\|u(x)\|^2 : x \in E \quad \text{et} \quad \|x\| = 1\}$.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit $k > 0$. On dit que $u \in L(E)$ est une *similitude* de rapport k si pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dit que u *conserve l'orthogonalité* si pour tout $(x, y) \in E \times E$, $< x, y >= 0$ implique $< u(x), u(y) >= 0$.

1. a) Un endomorphisme orthogonal est-il une similitude ? Si oui, quel est son rapport ?

b) Donner un exemple de similitude de rapport 2.

c) Que peut-on dire de la composée de deux similitudes ?

2. Soit u une similitude de rapport k.

a) Montrer que les seules valeurs propres possibles de u sont k et $-k$.

b) En déduire que u est bijective.

3. Soit s un endomorphisme symétrique de E. Montrer que s est une similitude de rapport k si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $s(y) = ky$ pour tout $y \in F$ et $s(z) = -kz$ pour tout $z \in F^\perp$.

4. Soit u une similitude de rapport k. Montrer que pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a $< u(x), u(y) >= k^2 < x, y >$.

5. Montrer que si u est une similitude, alors u conserve l'orthogonalité et est bijective.

6. On veut montrer la réciproque : soit u un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité et qui est bijectif. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

a) Soient $x, y \in E$. Montrer que $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux si et seulement si x et y ont même norme.

b) Montrer que $\mathcal{B}' = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthogonale de E.

c) Soit $j = 2, \ldots, n$. Montrer que les vecteurs $u(e_1 + e_j)$ et $u(e_1 - e_j)$ sont orthogonaux.

d) En déduire que tous les vecteurs de $\mathcal{B}'$ ont même norme. On notera k cette valeur commune.

d) Soit x de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Calculer $\|x\|^2$ et $\|u(x)\|^2$ en fonction des x_i.

e) Conclure.