Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MA02

13 Février 2012

Feuille d'exercices n^0 2

Exercice 1

Soient q_1, q_2, q_3 les formes quadratiques sur $\mathbf{R}^3$ définies pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ par
(i) $q_1(x, y, z) = x^2 - 2xy + z^2$.
(ii) $q_2(x, y, z) = 2xy + 2yz$.
(iii) $q_3(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2xz$.
Pour chacune de ces formes quadratiques, déterminer sa matrice, son rang, son noyau et préciser si elle est non dégénérée ou définie.

Exercice 2

Soient f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E et q la forme quadratique associée. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
  (i) F et G sont orthogonaux ;
  (ii) $F \subset G^\perp$ et
  (iii) $G \subset F^\perp$.

b) Montrer que $F \subset F^\perp \Leftrightarrow F \subset C(q)$.

c) Soient x et y des vecteurs de E isotropes. Montrer que $x + y$ est isotrope si et seulement si x et y sont orthogonaux.

Exercice 3

Soient f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E et q la forme quadratique associée. Soient $u \in E$ un vecteur non isotrope et D la droite engendrée par u.

a) Montrer que pour tout $v \in E$, le vecteur $v - \frac{f(u,v)}{q(u)} u$ appartient à $D^\perp$.

b) En déduire que $E = D \oplus D^\perp$.

Exercice 4

On considère les applications q_1, q_2 et q_3 de $\mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{R}$ définies, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ par

$$q_1(P) = 2P(1)P'(0); \quad q_2(P) = P(-1)P(0)P(1); \quad q_3(P) = |P(-1)P(1)|.$$

Parmi ces applications, déterminer celles qui sont des formes quadratiques. Dans ce cas, donner la forme polaire associée.

Exercice 5
Soit q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^4$ définie pour tout (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$ par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2xz - 2zt.$$

a) Déterminer la matrice de q dans la base canonique $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ de $\mathbf{R}^4$. La forme quadratique q est-elle dégénérée ?
b) Déterminer $F^\perp$, $F \cap F^\perp$ et $dim(F) + dim(F^\perp)$ lorsque F est le sous-espace vectoriel suivant :
(i) $F = D = Vect(\epsilon_1)$;
(ii) $F = P = Vect(\epsilon_3, \epsilon_4)$;
(iii) $F = Q = Vect(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_3 - \epsilon_4)$;
(iv) $F = H$ hyperplan d'équation : $x + y = 0$.

Exercice 6
On considère $E = \mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et les formes linéaires sur E définies par :

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1), \quad \varphi_3(P) = \int_0^1 P(t)dt.$$

1) Déterminer les coordonnées de chaque φ_i dans la base $\mathcal{B}^* = (e_0^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ duale de $\mathcal{B}$.
2) La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ?
3) Déterminer la dimension de $F = \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_3)$.
4) On pose $q = \varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_3^2$. Montrer que q est une forme quadratique sur E.
5) Déterminer la signature de q. Déterminer le rang de q.
6) En déduire la dimension du noyau de q. Donner une autre justification de ce résultat.

Exercice 7
Opérer la réduction de Gauss et déterminer noyau, rang, signature et base orthogonale, pour les formes quadratiques suivantes :
a) $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 2xy + 4xz$;
b) $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz - 6yz$;
c) $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = xy + yz$;
d) $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)$;
e) $q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 4zt$;
f) $q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z, t) = xy + 2xz + xt + 2yt + 4zt$.