Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MT06

15 Février 2013

Pb n^0 1

à rendre pour le 9 Mars 2013

Soit $E = \mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ sa base canonique.
On considère la forme quadratique q définie sur E par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2yz + 2yt.$$

1. (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.
   (b) La forme quadratique q est-elle non-dégénérée ?

2. On considère les vecteurs

$$\vec{u}_1 = \epsilon_1, \quad \vec{u}_2 = 2\epsilon_1 + \epsilon_3, \quad \vec{u}_3 = 3\epsilon_1 + \epsilon_4$$

et $F = Vect(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\})$.
   (a) Déterminer la dimension de F.
   (b) Déterminer l'orthogonal de F pour q. Quelle est sa dimension ?
   (c) Retrouver la réponse à la question 1(b) en donnant un nouvel argument.

3. (a) Déterminer la signature de q.
   (b) Retrouver la réponse à la question 1(b) en donnant encore un autre argument.

4. Déterminer le noyau de q.

5. Déterminer une base de E qui soit q-orthogonale.