Université d'Orléans
Science & Technology
1, rue de Chartres - BP 6759 - 45067 Orléans cedex 2

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016-2017 - Semestre 1
EXAMEN 1ère SESSION

Numéro de l'UE : SLO1MT07

Intitulé : Mathématiques pour sciences physiques 1

Date et horaire : jeudi 5 janvier 2017, à 10h30 en amphi 4

Durée : 2h (Réservez 1h pour chaque partie)

Responsables de l'UE : Pascal Andreazza

Mention/Spécialité/Parcours : Licence de Physique et Licence de Chimie

Documents autorisés : $\emptyset$ **Matériels autorisés : $\emptyset$**

Les deux parties sont indépendantes et doivent être traitées sur des copies séparées.

Partie A : durée indicative 1h

Exercice 1 : Nombres complexes - Équation différentielle.

1. Linéariser $\cos^3 x \sin x$, x étant un nombre réel .
2. Quelles sont les solutions de l'équation $Z^4 = 1$, Z etant un nombre complexe (on donnera leur expression sous forme trigonométrique et sous forme cartésienne).
   En déduire les 4 solutions z de l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$
3. Résoudre l'équation différentielle suivante $y"(t) + y'(t) - my(t) = (2t+3)e^{2t}$.
   a. Pour quelle valeur de m, la solution est-elle oscillante ?
   b. Trouver les solutions pour $m = 6$.
   c. Combien y a-t-il de solutions telles que y(0) = 0 et y'(0) = 0 ? Exprimer les.

Exercice 2 : Systèmes de coordonnées - Gradient La position d'un point M est repéré par ses coordonnées (x, y, z) dans le système cartésien et (r, θ, φ) dans le système sphérique par rapport à l'origine O.

1. Rappeler les domaines de variation des 3 coordonnées dans chacun les deux systèmes pour que chaque position de l'espace soit décrite de manière univoque.
2. Faire un schéma où apparaissent (r, θ, φ) et (x, y, z) composantes du vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Exprimer ces coordonnées (x, y, z) en fonction des coordonnées (r, θ, φ) en projetant le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne (calculer par projection orthogonale de r selon $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$).
3. Exprimer les dérivés partielles de $\vec{r}$ selon r, θ et φ.
4. En déduire les vecteurs unitaires de la base sphérique $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ en fonction des vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. Puis donner la matrice de changement de base puis la matrice inverse.
5. Placer les vecteurs unitaires de la base sphérique $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ sur le schéma.
6. Exprimer le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ partir de ces dérivées dans la base sphérique. En déduire l'expression du gradient d'un champ scalaire f en coordonnées sphériques. Donner l'expréssion de l'opérateur nabla.
7. Déterminer l'expression de $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ dans la base des coordonnées sphériques.
8. Soit $f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^{2/3}}(2\cos^2\theta - 1)cos\varphi$, calculer le gradient de $f(\vec{r})$ au point P de coordonnées $(27, \pi/4, \pi/4)$. Donner le vecteur perpendiculaire à la surface de niveau $f(r, \theta, \varphi) = 1$ au point P.

Tournez, svp

Partie B (durée indicative 1h)

1. Soit α un nombre réel. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer AB.
   (b) Lesquels des produits AC, BA, CA et C^2 sont possibles (on ne demande pas de les calculer) ?
   (c) Déterminer les α pour lesquels AB est inversible.
   (d) Déterminer le noyau de AB pour $\alpha = -1$.
   (e) Déterminer l'image de AB pour $\alpha = -1$.

2. Dans R^3 muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan vectoriel P d'équation

$$x + 4y - 3z = 0.$$

   (a) Donner un vecteur normal au plan P.
   (b) Pour quelle valeur de λ le vecteur $\vec{u} = \lambda\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ appartient-il à P ?
   (c) On choisit la valeur de λ de la question précédente. Compléter $\vec{u}$ en une base orthogonale $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\vec{v}$ appartienne aussi à P.
   (d) Normaliser la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ pour obtenir une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
   (e) Ecrire le vecteur $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 4y + 2.$$

   (a) Déterminer les points critiques de f.
   (b) Calculer la matrice hessienne de f au point (x, y).
   (c) Déterminer la nature (minimaux ou maximaux locaux, point-selle) de f aux points critiques.
   (d) Justifier que f a un minimum global et pas de maximum.

4. Soit $g(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, y/x)$.
   (a) Déterminer le domaine de g.
   (b) La fonction g est-elle de classe C^1 ?
   (c) Calculer la matrice jacobienne de g au point $(1, 1)$.